Döntő
2018. február 9.
XI. Dürer Verseny
Matematika kifejtős
11-12. osztályosok
D+ kategória

1. a) Bizonyítsátok be, hogy bármilyen n pozitív egészre megadható n darab pozitív egész szám úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
b) Megadható-e ugyanezen feltétellel végtelen sok pozitív egész szám?

2. a) Bizonyítsátok be, hogy ha az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$f(f(g(x))) = g(f(f(x))) = x$$

teljesül minden valós x esetén, akkor $f(g(f(x))) = x$ is teljesül minden valós x esetén.
b) Igaz-e, hogy ha az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$f(f(g(x))) = g(f(f(x))) = 2x$$

teljesül minden valós x esetén, akkor $f(g(f(x))) = 2x$ is teljesül minden valós x esetén?

3. Adott egy ABC háromszög. Legyen D az AB szakasz A-n túli meghosszabbításán úgy, hogy $AD = BC$, az E pedig a BC szakasz B-n túli meghosszabbításán úgy, hogy $BE = AC$. Bizonyítsátok be, hogy a DEB háromszög köréírt köre átmegy az ABC háromszög beírt körének középpontján.

4. Egy 101×101-es táblázat minden mezőjébe beleírtuk a -1, 0, 1 számok valamelyikét. Mind a 101 sorban, és 101 oszlopban külön-külön felírtuk a számok összegét. Lehetséges-e, hogy a felírt számok mindegyike különböző legyen?

5. Legyen p pozitív prímszám, a, b, c pedig p-vel nem osztható egészek, és legyen

$$S_p(a,b,c) = \{n \in \mathbb{N} : n < p,\ p \mid a^n + b^n + c^n\}.$$

a) Legyen p olyan prímszám, melyre $\frac{p-1}{2}$ is prím. Mutassátok meg, hogy ekkor bármilyen a, b, c esetén

$$|S_p(a,b,c)| < 1 + \sqrt{2p}.$$

b) Mutassátok meg, hogy végtelen sok p-hez léteznek alkalmas a, b, c számok, melyekre

$$|S_p(a,b,c)| > \frac{p}{2}.$$

6. Játék: A játék kezdetén a korongok néhány (nem feltétlenül egyforma méretű) téglalapban lesznek elhelyezve. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XI. Dürer Verseny szervezői