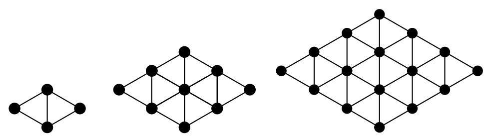
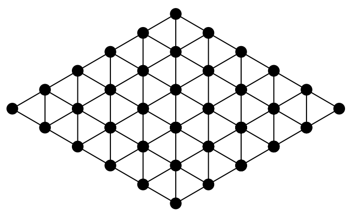
Megoldások az A kategória feladataihoz
(matematika, 5-6. osztályosok)

1. Az ábrán megadtuk egy sorozat első három mintáját. Rajzoljátok le az 5. mintát. Hány pötty van a 7. mintán?



Megoldás: Az ábrán a sorozat ötödik mintája látható.



A hetedik minta így egy olyan rácsozott rombusz, melynek minden oldalát a rácsvonalak 7 részre osztják, így a 7. minta egy oldalán 8 pötty van. Összesen tehát a mintában $8 \cdot 8 = 64$ pötty van.

2. Hófehérke balról jobbra magasság szerint növekvő sorba állította a 7 törpét. Az alábbi megállapításokat tette:
1. Tudor áll középen.
2. Szende és Kuka áll a két szélén.
3. Vidor két szomszédja Szundi és Kuka.
4. Morgónál magasabb Hapci, de alacsonyabb Vidor.
Milyen sorrendben állnak a törpék?

Megoldás: Készítsünk egy táblázatot, amelybe a törpéket magasság szerint beírhatjuk a feladat állításainak megfelelően. "Tudor áll középen."

			Tudor			
1	2	3	4	5	6	7

"Szende és Kuka áll a két szélén." Itt két lehetőségünk van, vagy Kuka a legalacsonyabb és Szende a legmagasabb, vagy Kuka a legmagasabb és Szende a legalacsonyabb. Tegyük fel, hogy Kuka a legmagasabb.

Szende			Tudor			Kuka
1	2	3	4	5	6	7

"Vidor két szomszédja Szundi és Kuka." Tehát Vidor Kuka mellett áll, nála eggyel alacsonyabb törpe pedig Szundi lesz.

Szende			Tudor	Szundi	Vidor	Kuka
1	2	3	4	5	6	7

"Morgónál magasabb Hapci, de alacsonyabb Vidor." Ennek alapján nem tudjuk befejezni a sorbaállítást, mert Vidornál már nem tudunk magasabb törpét berakni a sorba. Abból a feltevésből, hogy Kuka a legmagasabb, ellentmondásra jutottunk, tehát tegyük fel most, hogy Szende a legmagasabb.

Kuka			Tudor			Szende
1	2	3	4	5	6	7

Így Vidor a szomszédaival együtt most Tudornál alacsonyabb lesz.

Kuka	Vidor	Szundi	Tudor			Szende
1	2	3	4	5	6	7

Morgó és Hapci a két szabad helyre áll, és az, hogy Morgónál magasabb Hapci, a kettejük sorrendjét is megadja. Tehát a helyes sorrend:

Kuka	Vidor	Szundi	Tudor	Morgó	Hapci	Szende
1	2	3	4	5	6	7

3. Annipanni és Boribon háza a vasút mellett áll. Egyik nap egy 6 kocsiból álló vonat ment el az ablakuk alatt, melynek minden kocsija fekete (F) vagy piros (P) színű volt. Miközben a vonat elment, Annipanni és Boribon is látott egy-egy részletet belőle. Annipanni ezt látta: FPFF, Boribon pedig ezt: FFP. Hányféleképpen nézhetett ki a vonat?

Megoldás: A vonat 6 kocsiból áll és egyikük 4 kocsit, másikuk 3 kocsit látott, ezért mindenképpen kell, hogy legyen közös része a látott részleteknek. A közös rész egy vagy két kocsi lehetett. Ugyanis ha 3 kocsi lett volna, akkor FFP elhelyezhető lenne az FPFF mintában, de ez nem lehetséges.

Ha Annipanni pillantotta meg hamarabb a vonatot:

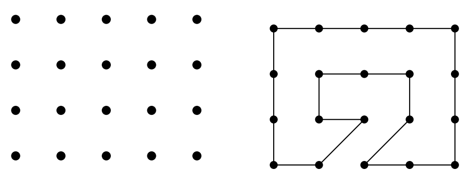
- Egy közös kocsi esetén FPFFFP, amit ketten együtt láttak, ez már mind a 6 kocsi színét megadja, innen tehát van 1 lehetőségünk.
- Két közös kocsi esetén FPFFP, amit ketten együtt láttak. Ekkor a vonat FPFFP* vagy *FPFFP alakú lehet, ahol a * egy tetszőleges szinű kocsi. Ez 4 lehetőséget ad.

Ha Boribon pillantotta meg hamarabb a vonatot:
Mindenképp 2 közös kocsit kellett látniuk, hiszen FFP P-re végződik, FPFF F-fel kezdődik, emiatt nem lehet egy közös látott kocsi. Így FFPFF részt láttak. Ekkor a vonat FFPFF* vagy *FFPFF alakú lehet, ahol a * egy tetszőleges szinű kocsi. Ez 4 lehetőséget ad.
Soroljuk fel, amiket találtunkfd:
A eset: FPFFFP
B eset: FPFFP*
C eset: *FPFFP
D eset: FFPFF*
E eset: *FFPFF

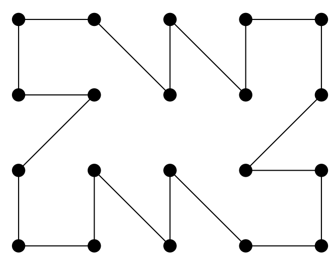
Ezek közül a C és D eset eredményezhet ugyanolyan vonatot, ha C esetben a csillag F-et jelöl és a D esetben P-t (FFPFFP). Ezt a vonatot kétszer számoltuk, így a végén kivonjuk egyszer. Mindenhol a középső 4 kocsit megfigyelve láthatjuk, hogy egyéb esetek nem adhatnak egyformát.

Összességében $1 + 4 + 4 - 1 = 8$ különböző hatkocsis vonatot láthattak.

4. Kössétek össze ezeket a pontokat úgy, hogy egy olyan sokszöget kapjatok, amelynek minden csúcsa az alábbi 20 pont közül való és a lehető legtöbb oldala van!
A jobb oldali ábrán látható sokszögnek például 11 oldala van.



Megoldás: Bármely sokszögnek éppen annyi oldala van, ahány csúcsa. Minden csúcsnak a rács 20 pontja közül kell kikerülnie, és egy pont csak egyszer lehet csúcs. Így a pontok összekötésével kapott sokszögeknek legfeljebb 20 oldala lehet és ezt el is lehet érni, például így:



5. Beírtuk 1-től 9-ig a számokat egy 3×3-as táblázatba.
a) Lehet-e egyszerre két sorban is a számok összege 11?
b) Lehet-e egyszerre mindhárom sorban a számok összege 11?
c) Lehet-e egyszerre két sorban és egy oszlopban is a számok összege 11?
d) Lehet-e egyszerre két sorban és két oszlopban is a számok összege 11?
Ha a válaszotok az, hogy lehet, adjatok példát ilyen kitöltésre.
Ha a válaszotok az, hogy nem lehet, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem lehet.

Megoldás:

a) Ez lehetséges, például így:

5	4	2
7	3	1
6	8	9

Ekkor az első két sorban 11 az összeg.

b) Ez már nem lehetséges. Ha mindhárom sorban az összeg 11 lenne, akkor a táblában a számok összege $3 \cdot 11 = 33$ lenne, ám 1-től 9-ig a számok összege valójában $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

c) Ez lehetséges, íme egy példa:

2	4	5
3	7	1
6	8	9

Itt az első két sorban, valamint az első oszlopban 11 az összeg.

d) Ez nem lehetséges. A 9 szám összege 45, így ha két sorban is 11 az összeg, akkor a harmadikban $45 - 2 \cdot 11 = 23$ kell legyen. Hasonlóan, ha két oszlopban is 11 az összeg, akkor a harmadikban 23 kell legyen.

Tehát ha feltesszük, hogy két sor és két oszlop összege is 11, akkor lesz olyan sor is, és olyan oszlop is, melynek az összege 23. Ám a 9 szám közül három különbözőnek az összege csak $9 + 8 + 6$ módon lehet 23. (Mivel a legnagyobb összeg $9 + 8 + 7 = 24$, és eggyel kevesebbet csak $9 + 8 + 6$ módon vehetünk.) Viszont az nyilván lehetetlen, hogy egy sorban és egy oszlopban is a 6, 8, 9 számok álljanak.

6. **(Játék)** Egy táblázatban 1-től 8-ig szerepelnek a számok. Két játékos felváltva takar le 1-1 számot addig, amíg csak 2 szám marad. Ha a megmaradt két szám összege páros, akkor a kezdő nyer, ha pedig páratlan, akkor a második.

1	2	3	4	5	6	7	8

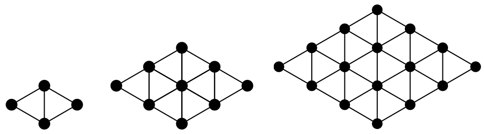
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Az első játékos akkor nyer, ha két páros vagy két páratlan szám marad a végén. A második játékos akkor, ha egy páros és egy páratlan.

A második játékosnak van nyerő stratégiája. Arra kell törekednie, hogy mindig ugyannyi páros és páratlan szám maradjon, mert így a játék végén a megmaradó számok összege páratlan lesz. Ha az első játékos páratlan számot takar le, akkor ő párosat fog, ha pedig párosat takart le, akkor ő páratlant fog. Kezdetben 4 páros és 4 páratlan szám van a lapon, így a második játékos minden lépése után ugyanannyi páros szám lesz, mint páratlan. Azaz a két utolsó szám is egy páratlan és egy páros lesz, amelyek összege páratlan, tehát a második játékos nyer.

Megoldások a B kategória feladataihoz
(matematika, 7-8. osztályosok)

1. Az ábrán megadtuk egy sorozat első három mintáját. Rajzoljátok le az 5. mintát. Hány pötty van a 11. mintán?



Megoldás: Lásd A/1. Itt a tizenegyedik mintán összesen $(11+1)\cdot(11+1) = 144$ pötty van.

2. Annipanni és Boribon háza a vasút mellett áll. Egyik nap egy 8 kocsiból álló vonat ment el az ablakuk alatt, melynek minden kocsija fekete (F) vagy piros (P) színű volt. Miközben a vonat elment, Annipanni és Boribon is látott egy-egy részletet belőle. Annipanni ezt látta: FFPF, Boribon pedig ezt: PFPF. Hányféleképpen nézhetett ki a vonat?

Megoldás: Mivel a vonat 8 kocsiból áll és 4 hosszú részeket láttak, lehetséges, hogy teljesen különálló részeket figyeltek meg. Ekkor a vonat lehet FFPFPFPF vagy PFPFFFPF színezetű. De az is lehet, hogy valahány kocsit mindketten láttak, de ez nem lehetett hosszabb három kocsinál.

Ha Annipanni pillantotta meg hamarabb a vonatot:

- FFPF F-re végződik, PFPF P-vel kezdődik, emiatt nem lehet egy közös látott kocsi.
- Két közös kocsi esetén FFPFPF lehet csak, amit ketten együtt láttak. Ekkor a vonat FFPFPF**, *FFPFPF* vagy **FFPFPF alakú lehet, ahol a * egy tetszőleges szinű kocsi. Ez $3\cdot 4$ lehetőséget ad.
- Három közös kocsi nem lehetséges, mert FPF és PFP nem egyforma.

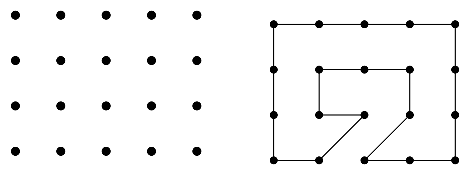
Ha Boribon pillantotta meg hamarabb a vonatot:

- Egy közös kocsi esetén PFPFFPF lehet csak, amit ketten együtt láttak. Ekkor a vonat PFPFFPF* vagy *PFPFFPF alakú lehet. Ez $2\cdot 2$ lehetőséget ad.
- Kettő vagy három közös kocsi nem lehetséges, mert PF és FF nem passzol, FPF és FFP sem.

Soroljuk fel, amiket találtunk:
A eset: FF PFPF PF
B eset: PF PFFF PF
C eset: FF PFPF **
D eset: *F FPFP F*
E eset: ** FFPF PF
F eset: PF PFFP F*
G eset: *P FPFF PF

Ezek közül a A és C eset eredményezhet ugyanolyan vonatot, ha C esetben **=PF (FFPFPFPF) Ezt a vonatot kétszer számoltuk, így a végén kivonunjuk egyszer. Mindenhol a középső 4 kocsit megfigyelve láthatjuk, hogy egyéb esetek nem adhatnak egyformát. Összességében $2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 1 = 2 + 12 + 4 - 1 = 17$ különböző nyolckocsis vonatot láthattak.

3. Kössétek össze ezeket a pontokat úgy, hogy egy olyan sokszöget kapjatok, amelynek minden csúcsa az alábbi 20 pont közül való és a lehető legtöbb oldala van!
A jobb oldali ábrán látható sokszögnek például 11 oldala van.



Megoldás: Lásd A/4.

4. Andris gondolt egy a, Bea pedig egy b pozitív egész számra. Azt tudjuk, hogy a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$ mindegyike prímszám.
a) Adjatok meg két számpárt, amelyre gondolhatott Bea és Andris!
b) Mutassátok meg, hogy Bea 5-nél nagyobb számra gondolt!

Megoldás:

a) Gondolhattak például az $a = 5$ és $b = 6$ számokra: ekkor az öt prímszám 5, 11, 17, 23 és 29.

Illetve lehetett például $a = 5$ és $b = 12$ is: 5, 17, 29, 41, 53 mind prímek.

Természetesen minden más jó megoldást is elfogadtunk; például $a = 7$ és $b = 30$ is jó: 7, 37, 67, 97 és 127 is mind prímek.

b) Ha $b = 1$ lenne, akkor az öt szám a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ és $a+4$ volna. Látható, hogy $a+2$ és $a+3$ közül az egyik páros, a másik páratlan. De egy páros szám csak akkor lehet prím, ha az 2, viszont $a+2$ és $a+3$ értéke legalább 3 (mivel $a \geq 1$). Vagyis $a+2$ és $a+3$ valamelyike nem lenne prím. Tehát Bea nem gondolhatott az 1-re.

Ha $b = 2$ lenne, akkor az öt szám a, $a+2$, $a+4$, $a+6$ és $a+8$ volna. Látható, hogy $a+4$, $a+6$ és $a+8$ mindenképp csupa különböző maradékot ad 3-mal osztva. Így közülük valamelyik 3-mal osztható. Ám ez a 3-mal osztható szám csak akkor lehet prím, ha az 3, de ezeknek a számoknak az értéke legalább 5 (mivel $a \geq 1$). Tehát ekkor sem lehetne az összes szám prím, azaz Bea nem gondolhatott a 2-re.

Ha $b = 3$ lenne, akkor a számok az alábbiak lennének:

$$a, a+3, a+6, a+9, a+12$$

Itt $a+9$ és $a+12$ közül az egyik páros, a másik páratlan, így a $b = 1$ esethez hasonlóan ellentmondást kapunk. (Nyilván a két szám egyike sem lehet 2.)

Ha $b = 4$ lenne, akkor az alábbi számokat kapnánk:

$$a, a+4, a+8, a+12, a+16$$

Itt is a 3-as osztási maradékot kell nézni: mivel 8, 12 és 16 csupa különböző maradékot adnak, ugyanez elmondható az $a+8$, $a+12$ és $a+16$ számokról is, tehát közülük valamelyik 3-mal osztható. Itt a $b = 2$ esethez hasonlóan ellentmondásra jutunk, ismét látható, hogy a számok egyike sem lehet 3.

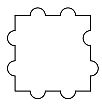
Ha $b = 5$ lenne, akkor pedig az alábbi számokat kapnánk:

$$a, a+5, a+10, a+15, a+20$$

Itt is célravezető a 3-as maradék. A 10, 15 és 20 csupa különböző maradékot adnak, így megint ellentmondást kapunk.

Így kijött, hogy Bea nem gondolhatott az 1, 2, 3, 4, 5 számokra, vagyis 5-nél nagyobb számra gondolt.

5. A játékgyárban elromlott a kirakóst gyártó gép. Most olyan 1 cm oldalú négyzeteket gyárt, amelyek minden oldalán két félkör található, összesen 8, amelyből 4 áll befelé és 4 kifelé. *Az ábrán például egy olyan darab látható, amelyet most nem tud gyártani, mert 7 félkör áll kifelé és csak 1 befelé.*



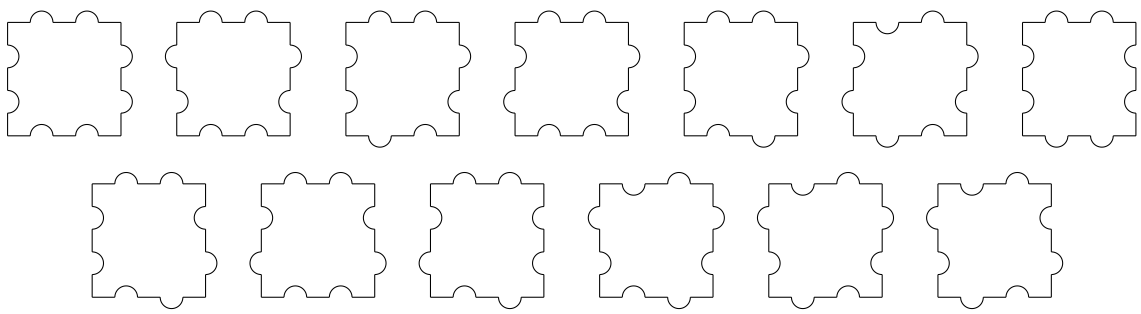
a) Hány különböző kirakós darabot tud készíteni a gép, ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetőeket egyformának tekintjük?

b) Ezek közül az egyik fajtával szeretnénk lefedni a terem közepén található 10 m$\times$10 m méretű részt úgy, hogy pont illeszkedjenek a darabok. (A darabok kilóghatnak a lefedendő részből.) A gépnek hála, ehhez van elég sok egyforma darabunk. A gép által előállított különböző darabok közül melyekkel tudjuk megoldani a lefedést, ha a darabokat forgatni szabad, de tükrözni nem?

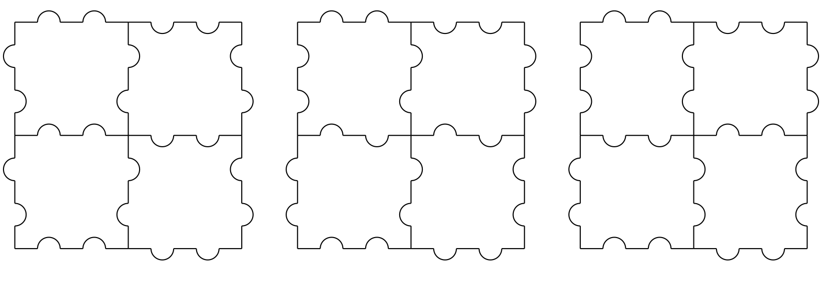
Ha a válaszotok az, hogy lehet, adjátok meg, hogyan.

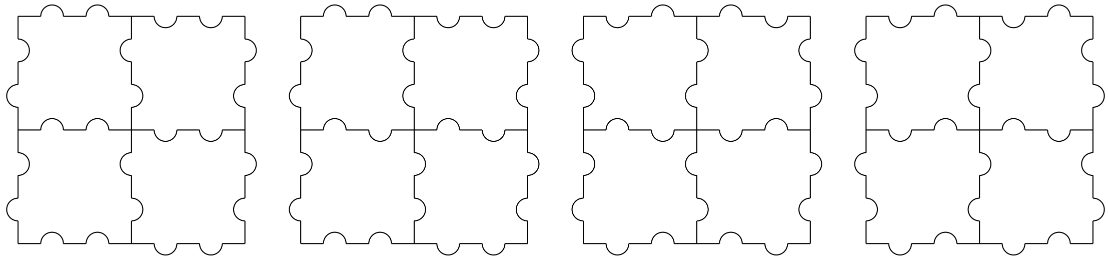
Ha a válaszotok az, hogy nem lehet, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem lehet.

Megoldás: a) A következő, összesen 13 különböző kirakós darabot tudja gyártni a gép:

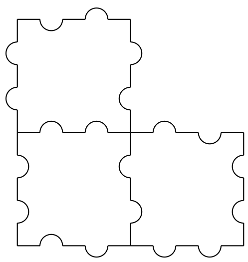


b) A harmadik és a nyolcadik kivételével az összes fajtával lefedhető a 10 m $\times$ 10 m méretű rész. Az első, negyedik, hatodik és tizenharmadik darabokkal forgatás nélkül lefedhetjük a területet. A második, ötödik, hetedik darabokból először kirakhatunk egy 2 cm $\times$ 2 cm-es négyzetet, majd ilyen négyzetekből elforgatás nélkül sokat (kb 250 ezret) összetéve tudunk 10 m $\times$ 10 m-es négyzetet is lefedni:





Állítjuk, hogy a nyolcadik elemmel és annak elforgatottjaival a kívánt kirakás nem lehetséges. Tegyük fel, hogy mégiscsak kiraktuk a 10 m × 10 m-es négyzetet. Föltehető, hogy a harmadik kirakós elem előfordul benne a listánkon szereplő pozicióban, ráadásul nem a kirakott rész szélén. Ekkor a fölötte és a tőle jobbra lévő elem csak egyféle helyzetben lehet, tehát megjelenik a következő alakú kirakós hármas:



Itt azonban a jobb fölső kirakós nem választható meg úgy, hogy az eredeti elforgatottja legyen és megfelelően illeszkedjen, tehát ellentmondásra jutottunk. Ugyanilyen módon belátható, hogy a harmadik kirakós elforgatottjaival sem lehetséges a kívánt kirakás.

6. **(Játék)** Egy táblázatban 1-től 10-ig szerepelnek a számok. Két játékos felválva takar le 1-1 számot addig, amíg csak 2 szám marad. Ha a megmaradt két szám összege páros, akkor a kezdő nyer, ha pedig páratlan, akkor a második.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Az első játékos akkor nyer, ha két páros vagy két páratlan szám marad a végén. A második játékos akkor, ha egy páros és egy páratlan.

A második játékosnak van nyerő stratégiája. Arra kell törekednie, hogy mindig ugyannyi páros és páratlan szám maradjon, mert így a játék végén a megmaradó számok összege páratlan lesz. Ha az első játékos páratlan számot takar le, akkor ő párosat fog, ha pedig párosat takart le, akkor ő páratlant fog. Kezdetben 5 páros és 5 páratlan szám van a lapon, így a második játékos minden lépése után ugyanannyi páros szám lesz, mint páratlan. Azaz a két utolsó szám is egy páratlan és egy páros lesz, amelyek összege páratlan, tehát a második játékos nyer.