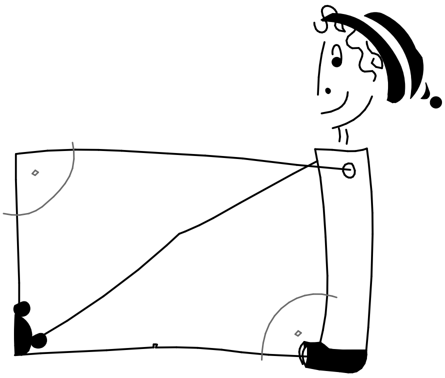
D+ kategória

D kategória

C+ kategória

C kategória



MATEMATIKA

Feladatok, megoldások és eredmények

2017

Dürer Matematika-, Fizika- és Kémiaverseny

1. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc 4×4-es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhetett pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát az összes lehetséges értékre, és mutassátok meg, hogy más tényleg nem lehet.

2. Az ABC háromszög egyenlő szárú és az A csúcsnál derékszöge van. Szerkesszétek meg az összes olyan egyenest, amely egyszerre teljesíti az alábbi két feltételt:

1. az A és B pontoktól egyenlő távolságra van;
2. a C ponttól éppen háromszor akkora távolságra van, mint a B ponttól.

3. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

4. Egy 52 lapos kártyapakli lapjai 1-től 52-ig meg vannak számozva. A kártyák egy sorrendjét kézzel rendezhetőnek nevezzük, ha előállítható a számozás szerinti sorrend úgy, hogy a pakli tetejéről egyesével felvett lapokat mindig a kezünkben lévők elejére, vagy végére tesszük.
Hány kézzel rendezhető sorrendje van a kártyapaklinak?

5. Négy rab áll egymás mögött egy sorban. Az őrök a fejükre hat, 1-től 6-ig számozott sapka közül tesznek egyet-egyet, tehát mindenki különböző sorszámú sapkát kap. Minden rab csak a sorban előtte állók sapkáját látja. Hátulról előre egyesével tippelhetnek a saját sapkájuk számára (tehát először az tippel, aki a három előtte álló sapkáját látja). Olyan számra nem tippelhetnek, amely már korábban elhangzott. Hány biztosan jó tipp érhető el, ha a rabok a stratégiájukat előre megbeszélhetik?

6. Játék: Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot. A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya alsó sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány szomszédos CÉL mezőt. Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.
2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyit.
3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.

Kifejtős forduló

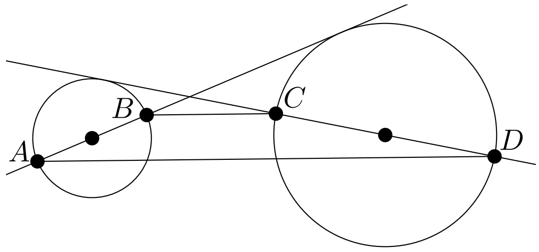
2017. február 10.

Matematika feladatsor

9 - 10. osztályosok

C+ kategória

1. Adott a síkon két kör és az egyiken az A és B, a másikon pedig a C és D pontok az ábrán látható módon. Az AB egyenes átmegy az első kör középpontján és érinti a második kört, míg a CD egyenes átmegy a második kör középpontján és érinti az első kört. Bizonyítsátok be, hogy az AD és a BC egyenesek párhuzamosak.



2. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

3. Egy derékszögű koordinátarendszer minden rácspontját három szín valamelyikével színeztük, és minden színt legalább egyszer használtunk. Bizonyítsátok be, hogy ekkor van olyan derékszögű háromszög, melynek csúcsai páronként különböző színű rácspontok (a háromszög befogóinak nem kell a koordinátatengelyekkel párhuzamosaknak lenniük).

4. Négy rab áll egymás mögött egy sorban. Az őrök a fejükre hat, 1-től 6-ig számozott sapka közül tesznek egyet-egyet, tehát mindenki különböző sorszámú sapkát kap. Minden rab csak a sorban előtte állók sapkáját látja. Hátulról előre egyesével tippelhetnek a saját sapkájuk számára (tehát először az tippel, aki a három előtte álló sapkáját látja). Olyan számra nem tippelhetnek, amely már korábban elhangzott. Hány biztosan jó tipp érhető el, ha a rabok a stratégiájukat előre megbeszélhetik?

5. Adott a síkon véges sok piros, kék és sárga pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Bármely piros háromszögben van kék pont, bármely kék háromszögben van sárga pont, és bármely sárga háromszögben van piros pont.

a) Keressetek minél jobb felső korlátot a pontok számára.

b) Adjatok konstrukciót minél több ponttal.

6. Játék: Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot. A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya alsó sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány (nem feltétlenül szomszédos) CÉL mezőt. Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.
2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyit.
3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.

C1. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc 4×4-es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhetett pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát az összes lehetséges értékre, és mutassátok meg, hogy más tényleg nem lehet.

Megoldás: A bal felső 4 kis négyzet között biztosan van piros, ugyanis vagy a sarok piros, vagy a két szomszédja közül valamelyik. Ugyanez igaz a bal alsó, a jobb felső és a jobb alsó 4 kis négyzetre. Ez a négy csoport csupa különböző négyzetet tartalmaz, tehát van legalább 4 piros négyzet.

Természetesen ez elmondható a kék és zöld színre is. Ezért nem lehet 8-nál több piros négyzet, mert ekkor az összesen 16 négyzetből legfeljebb 7 maradna a kékeknek és a zöldeknek, viszont mindkettőből legalább 4 van.

Tehát a piros négyzetek lehetséges száma 4, 5, 6, 7 vagy 8. Ezek mindegyike meg is valósítható, például a következő módokon.

k	p	z	k
z	k	k	p
p	k	k	z
k	z	p	k

k	p	z	k
z	k	k	p
p	p	k	z
k	z	p	k

k	p	z	k
z	k	p	p
p	p	k	z
k	z	p	k

p	k	z	p
z	p	p	k
k	k	p	z
p	z	k	p

p	k	z	p
z	p	p	k
k	p	p	z
p	z	k	p

C2. Az ABC háromszög egyenlő szárú és az A csúcsnál derékszöge van. Szerkesszétek meg az összes olyan egyenest, amely egyszerre teljesíti az alábbi két feltételt:

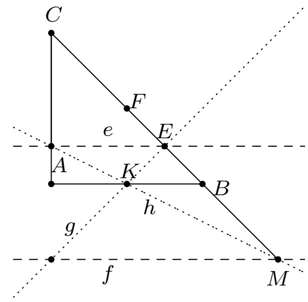
1. az A és B pontoktól egyenlő távolságra van;
2. a C ponttól éppen háromszor akkora távolságra van, mint a B ponttól.

Megoldás: Jelölje az ABC háromszög befogójának hosszát a, az AB szakasz felezőpontját K. A BC szakasz B-hez közelebb eső negyedelőpontját E, míg a BC egyenesen B-től C-vel ellentétes irányban $|BC|/2$ távolságra lévő pontot M.

Az első feltételnek eleget tévő egyenesek két csoportra bonthatóak, az egyik típus az összes K-n áthaladó egyenes, a másik típus az összes AB-vel párhuzamos egyenes.

A második feltételnek eleget tevő egyenesek pontosan azok, melyek vagy az E, vagy az M ponton áthaladnak.

Így már könnyebb áttekinteni azokat az egyeneseket, amelyekre egyszerre teljesül az első és a második feltétel is. A két-két feltétel négy lehetséges módon kombinálható, és minden kombinációhoz pontosan egy egyenes tartozik. Az ábrán e jelöli az AB-vel párhuzamos és E-n áthaladó egyenest, f pedig az AB-vel párhuzamos és M-en áthaladó egyenest. Továbbá g jelöli a K-n és E-n is áthaladó egyértelmű egyenest és h jelöli a K-n és M-en is áthaladó egyértelmű egyenest.



Összesen tehát 4 olyan egyenes létezik, mely mind a két feltételnek eleget tesz. Most vázlatosan leírjuk ezen egyenesek szerkesztési menetét.

Meg tudjuk szerkeszteni az AB szakasz felezőpontját, K-t, a BC szakasz felezőpontját, amelyet jelöljön F, majd az FB szakasz felezőpontját, E-t. Így E a CB szakasz B-hez közelebbi negyedelőpontja lesz. Az FB távolságot felmérhetjük a BC egyenesre, így kapjuk M-et. Ezután E-n illetve M-en keresztül párhuzamost szerkesztünk az AB egyenessel, így kapjuk az e illetve az f egyenest. Végül a K-n és E-n, illetve K-n és M-en áthaladó egyenesek g és h.

C3. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összedjuk őket és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám lehet?

Megoldás: Ha nincs a számok között két 1-es, és a párosak száma k, akkor a 2 nem szerepelhet az összegek között, és különböző páratlan prímből pedig legfeljebb $k(6-k)$ darab lehet, hiszen ennyi páratlan összeg van. Ez akkor a legtöbb, ha $k = 3$, eszerint legfeljebb 9 darab különböző prímszám lehet.

Ha viszont van két 1-es, és a párosak számát megint k-val jelöljük, akkor az összegek között szerepel a 2, és különböző páratlan prímből legfeljebb $k(6-k)-k$ darab van, ugyanis a $k(6-k)$ darab páratlan összeg között kétszer szerepelnek az 1+páros típusú összegek. Ez akkor a legtöbb, ha $k = 2$ vagy $k = 3$, ekkor összesen legfeljebb 7 darab különböző prímszám lehet.

Tehát legfeljebb 9 különböző prímszám lehet az összegek között. Ez el is érhető: ha a hat szám a 3, 9, 15, 2, 4 és 28, akkor az összegek között szerepel kilenc különböző prímszám: $3+2=5$, $3+4=7$, $3+28=31$, $9+2=11$, $9+4=13$, $9+28=37$, $15+2=17$, $15+4=19$, $15+28=43$.

C4. Egy 52 lapos kártyapakli lapjai 1-től 52-ig meg vannak számozva. A kártyák egy sorrendjét kézzel rendezhetőnek nevezzük, ha előállítható a számozás szerinti sorrend úgy, hogy a pakli tetejéről egyesével felvett lapokat mindig a kezünkben lévők elejére, vagy végére tesszük.
Hány kézzel rendezhető sorrendje van a kártyapaklinak?

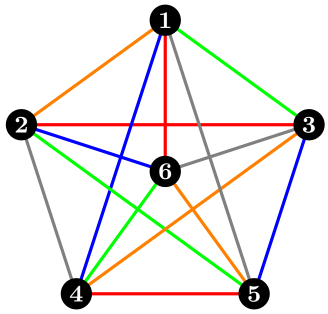
Megoldás: A feladat ekvivalens az alábbival: Vegyük kézbe a paklit az eredeti sorrenddel, majd helyezzük a kártyákat egymás mögé egy sorba úgy, hogy a pakliból mindig a legfelsőt vagy a legalsót tesszük le. Hány különböző permutációját kaphatjuk így a kártyáknak?

Az első 51 lap lerakásánál kétfélét léphetünk: tehetünk le kártyát alulról vagy felülről. Az utolsó lap lerakása viszont egyértelmű. Minden ilyen lerakás-sorozathoz rendelhetünk egy 51 hosszú A-F (alulról-felülről) betű-sorozatot. Különböző betű-sorozatokhoz különböző permutációk tartoznak, így a keresett permutációk száma 2^{51}.

C5. Négy rab áll egymás mögött egy sorban. Az őrök a fejükre hat, 1-től 6-ig számozott sapka közül tesznek egyet-egyet, tehát mindenki különböző sorszámú sapkát kap. Minden rab csak a sorban előtte állók sapkáját látja. Hátulról előre egyesével tippelhetnek a saját sapkájuk számára (tehát először az tippel, aki a három előtte álló sapkáját látja). Olyan számra nem tippelhetnek, amely már korábban elhangzott. Hány biztosan jó tipp érhető el, ha a rabok a stratégiájukat előre megbeszélhetik?

Megoldás: Könnyű meggondolni, hogy négy biztosan jó tipp nem érhető el: a negyedik rab ugyan látja a többiek fején lévő sapkákat, de a maradék három sapka közül nem tudja eldönteni biztosan, hogy a saját fején melyik van. Most adunk egy stratégiát, amivel viszont három biztosan jó tipp elérhető.

Ehhez először megadjuk a sapkáknak az ábrán látható, öt különböző párosításba rendezését (hasonlóan egy hatcsapatos bajnokság fordulóihoz), amik a következőek: 12, 34, 56 (narancs); 23, 45, 61 (piros), 14, 26, 35 (kék), 25, 13, 46 (zöld), 36, 15, 24 (szürke). Könnyen ellenőrizhető, hogy ezen párosításoknak megvan az a tulajdonsága, hogy bármely két sapka pontosan egy párosításban alkot párt.

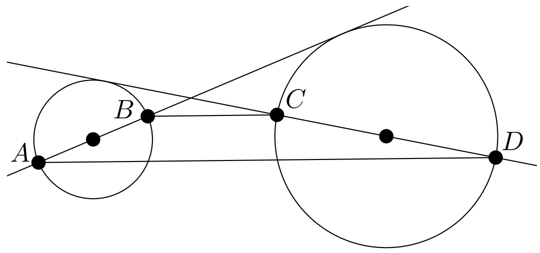


6 rab 5 párosítása

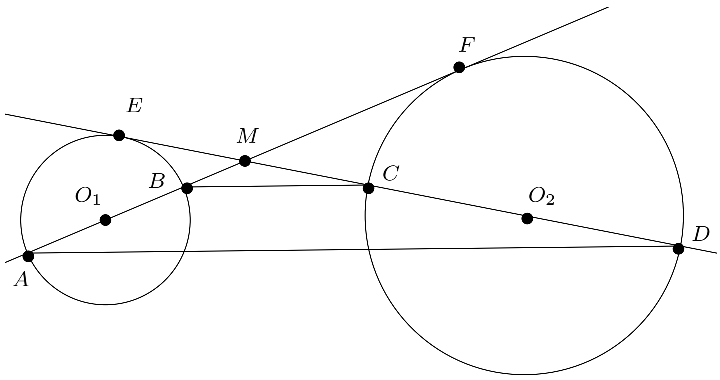
A rabok stratégiája a következő. A leghátsó rab látja az első és második rab fején lévő sapkát, és a fenti öt párosításból kiválasztja azt az egyet, amelyikben ezek párt alkotnak (a fentiek alapján ez a párosítás egyértelmű). Ezután megnézni, hogy a harmadik rab fején melyik sapka van, és a sajátjára annak a párját mondja be a kiválasztott párosítás szerint. Ő nem biztos, hogy helyesen tippelt, de meggondoljuk, hogy a többiek ezek alapján meg tudják határozni a sapkáikat.

A harmadik rab szintén látja az első kettő rab fején lévő sapkákat, így ő is meg tudja határozni azt a párosítást, ahol azok párt alkotnak. Hallja, hogy a negyedik rab melyik sapkát tippelte, amiből ő megtudja, hogy a fején ennek a párja szerepel. Az első két rab miután meghallja a harmadik és negyedik tippjét, szintén ki tudja találni, hogy melyik párosítás szerint tippelt a két hátsó rab, hiszen ők aszerint a párosítás szerinti pár két tagját tippelik. Azt is tudják, hogy eszerint a párosítás szerint a sapkáik párt alkotnak. Így egyrészt a második rab meg tudja mondani a fején lévő sapkát, hiszen ő látja az első rabon lévőt, tehát csak annak a párját kell bemondania. Másrészt ezek után az első rab is ki tudja találni a saját fején lévő sapkát, hiszen rajta a második rab által bemondott párja van. Tehát az utolsó rabon kívül mindenki tud biztosan jót tippelni.

C+1. Adott a síkon két kör és az egyiken az A és B, a másikon pedig a C és D pontok az ábrán látható módon. Az AB egyenes átmegy az első kör középpontján és érinti a második kört, míg a CD egyenes átmegy a második kör középpontján és érinti az első kört. Bizonyítsátok be, hogy az AD és a BC egyenesek párhuzamosak.



Megoldás: Legyen az első kör középpontja O_1, a másodiké pedig O_2. Legyen az első körön lévő érintési pont E, a másodikon lévő pedig F. Legyen a két egyenes metszéspontja M. Ekkor az O_1EM és O_2FM háromszögek hasonlóak, mivel mindkettőnek van egy derékszöge és az M-nél lévő szögük megegyezik. A hasonlóság aránya $\frac{O_1E}{O_2F}$, tehát $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{O_1E}{O_2F}$.



Mivel a két háromszög hasonló, $EO_1M\sphericalangle = FO_2M\sphericalangle$. Ezek alapján a O_1BE és O_2CF háromszögek is hasonlóak mivel egyenlő szárúak és a szárak bezárt szöge megegyezik. A hasonlóság aránya itt is $\frac{O_1E}{O_2F}$, tehát $\frac{BO_1}{CO_2} = \frac{O_1E}{O_2F}$.

Végül a BEA és CFD háromszögek is hasonlóak, mivel egyik szögük derékszög, egy másikról pedig beláttuk, hogy megegyezik. A hasonlóság aránya $\frac{EB}{FC}$, tehát megint csak $\frac{O_1E}{O_2F}$. Ez alapján $\frac{AB}{CD} = \frac{O_1E}{O_2F}$.

Összességében azt kaptuk, hogy $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{BO_1}{CO_2} = \frac{AB}{CD}$. Ezekből következik, hogy $\frac{MB}{MC} = \frac{MO_1}{MO_2} = \frac{MA}{MD}$. A párhuzamos szelők tétele alapján következik, hogy BC párhuzamos O_1O_2-vel és AD-vel.

C+2. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

Megoldás: ld. C/3.

C+3. Egy derékszögű koordinátarendszer minden rácspontját három szín valamelyikével színeztük, és minden színt legalább egyszer használtunk. Bizonyítsátok be, hogy ekkor van olyan derékszögű háromszög, melynek csúcsai páronként különböző színű rácspontok (a háromszög befogóinak nem kell a koordinátatengelyekkel párhuzamosaknak lenniük).

Megoldás: Legyen a három szín piros, kék és zöld. Két esetet különböztetünk meg a bizonyításban.

1. eset: Van olyan függőleges vagy vízszintes rácsegyenes, amelyen pontosan kétféle szín szerepel. Ekkor feltehető, hogy van egy ilyen függőleges e egyenes, és rajta kék és zöld pontok vannak. Mivel mindhárom színt felhasználtuk a konstrukcióban, ezért van piros színű pont valahol a síkon, legyen P

egy ilyen. Húzzuk meg a P-n átmenő vízszintes egyenest, messe ez e-t Q-ban. Q színe kék vagy zöld, feltehető, hogy kék. Mivel e-n kék és zöld pontok is voltak, választhatunk rajta egy zöld R pontot. Ekkor PQR egy derékszögű háromszög, melynek csúcsai különböző színűek.

2. eset: Minden függőleges és vízszintes egyenesen pontosan egy- vagy háromféle színű pontok vannak. Könnyen meggondolható, hogy ha minden függőleges és vízszintes egyenes egyszínű, akkor szükségképpen egy színt használhattunk csak, ami ellentmond a feltételeknek. Tehát van egy e függőleges vagy vízszintes egyenes, amely mindhárom színt tartalmazza. Ismét feltehetjük, hogy e függőleges. Ha P egy pontja e-nek, és a P-n átmenő vízszintes egyenes tartalmaz egy P-től különböző színű Q pontot, akkor e-n felvéve egy mindkettőtől különböző színű R pontot (amit megtehetünk, hiszen e háromféle színt tartalmaz), ismét kapunk egy tarka derékszögű háromszöget. Ez csak úgy nem jöhet létre, ha minden vízszintes egyenes egyszínű, tehát mostantól feltehetjük, hogy ilyen a színezésünk.

Vegyünk két szomszédos vízszintes rácsegyenest, melyen a pontok színe különböző, és legyen P és Q egy-egy rácspont rajtuk, melyek távolsága $\sqrt{2}$, azaz, ha f a PQ-ra merőleges, P-n átmenő egyenes, akkor f 45°-os szöget zár be a tengelyekkel és minden vízszintes rácsegyenest rácspontban metsz. Mivel van piros színű pont a síkon és minden vízszintes egyenes egyszínű, f valahol belemetsz egy vízszintes rácsegyenesbe, melynek minden rácspontja piros, így f tartalmaz egy piros színű R pontot. Ekkor PQR ismét egy derékszögű, tarka háromszög.

C+4. Négy rab áll egymás mögött egy sorban. Az őrök a fejükre hat, 1-től 6-ig számozott sapka közül tesznek egyet-egyet, tehát mindenki különböző sorszámú sapkát kap. Minden rab csak a sorban előtte állók sapkáját látja. Hátulról előre egyesével tippelhetnek a saját sapkájuk számára (tehát először az tippel, aki a három előtte álló sapkáját látja). Olyan számra nem tippelhetnek, amely már korábban elhangzott. Hány biztosan jó tipp érhető el, ha a rabok a stratégiájukat előre megbeszélhetik?

Megoldás: ld. C/5.

C+5. Adott a síkon véges sok piros, kék és sárga pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Bármely piros háromszögben van kék pont, bármely kék háromszögben van sárga pont, és bármely sárga háromszögben van piros pont.
a) Keressetek minél jobb felső korlátot a pontok számára.
b) Adjatok konstrukciót minél több ponttal.

Megoldás: Maximum 18 pont lehet. Megmutatjuk, hogy semelyik színből nem lehet több, mint 6 pont.

Legyen A egy véges ponthalmaz a síkon. Az A halmaz egy háromszögelése (triangulációja) alatt azt értjük, hogy A pontjait szakaszokkal összekötjük olyan módon, hogy

- a szakaszok nem metszik egymást;
- minden A-beli pont valamely szakasz végpontja;
- minden lap (azaz A pontjai által meghatározott korlátos tartomány, amely nem tartalmaz másik A-beli pontot vagy behúzott átlót) háromszög;
- A konvex burkának, mint sokszögnek az élei is be vannak húzva.

Bármely A véges ponthalmaznak létezik háromszögelése. Először húzzuk be A konvex burkának az éleit. Ha az összes A-beli pont A konvex burkának egy csúcsa, akkor valamelyik A-beli pontot kössük össze az összes többi ponttal. Ha pedig néhány pont A konvex burkának a belsejében van, akkor azokat egymás után kössük össze az őket tartalmazó legkisebb, már behúzott szakaszok által határolt sokszög összes csúcsával. Így minden lépés után a behúzott szakaszok csak háromszögeket határolnak, és ha az összes belső ponttal végeztünk, A egy háromszögelését kapjuk.

Segédtétel. *Legyen A egy véges, általános helyzetű ponthalmaz, és legyen $A_A \subset A$ az A konvex burkának a belsejében lévő pontok halmaza. (Azaz $A \setminus A_A$ a konvex burok csúcsai.) Legyen h_A a háromszögek száma A egy tetszőleges háromszögelésében. Ekkor*

$$h_A = |A| + |A_A| - 2 \geq |A| - 2.$$

Bizonyítás. Az Euler-formulát használjuk. A háromszögek mellett tekintenünk kell a külső, nem korlátos tartományt is, így a tartományok száma $h_A + 1$. Minden él két tartományt határol (a külső tartományt is beleértve), így az élek száma $\frac{3h_A + |A \setminus A_A|}{2}$. Az Euler-formula szerint

$$|A| - \frac{3h_A + |A \setminus A_A|}{2} + (h_A + 1) = 2,$$

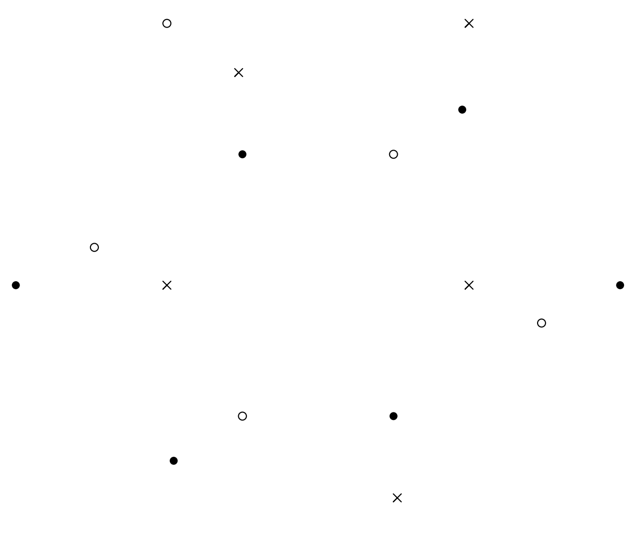
amiből átrendezéssel következik a segédtétel. □

Rátérünk annak a bizonyítására, hogy nem lehet 6-nál több egyszínű pont (például piros). Legyen P a piros pontok halmaza; és legyen P_P, K_P és S_P azon piros, kék ill. sárga pontok halmaza, amelyek P konvex burkának a belsejében vannak. Ha tekintjük P egy háromszögelését, mindegyik háromszög tartalmaz legalább egy-egy különböző kék pontot, és ezek természetesen mind P konvex burkának a belsejében vannak, azaz a segédtétel szerint $|K_P| \geq |P| + |P_P| - 2$. Ezután tekintjük K_P egy háromszögelését. Ekkor mindegyik háromszög tartalmaz legalább egy-egy különböző sárga pontot, és ezek P konvex burkának a belsejében vannak, hiszen maguk a K_P-beli pontok által alkotott háromszögek is P konvex burkának a belsejében vannak. Tehát a segédtétel alapján $|S_P| \geq |K_P| - 2$. Végül S_P egy háromszögelését tekintve hasonlóan azt kapjuk, hogy $|P_P| \geq |S_P| - 2$. A három egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$|P_P| \geq |S_P| - 2 \geq |K_P| - 4 \geq |P| + |P_P| - 6,$$

azaz $|P| \leq 6$. Ezzel bizonyítottuk, hogy egyik színből se lehet több, mint 6 pont.

18 pontot el lehet helyezni az ábrán látható módon ($\bullet$ = piros, $\circ$ = kék, $\times$ = sárga.) Ellenőrizhető, hogy megfelel a feladat feltételeinek; az ábra szimmetriája miatt elég egy színt ellenőrizni.



Döntő

2017. február 11.

Váltóverseny

9 - 10. osztályosok

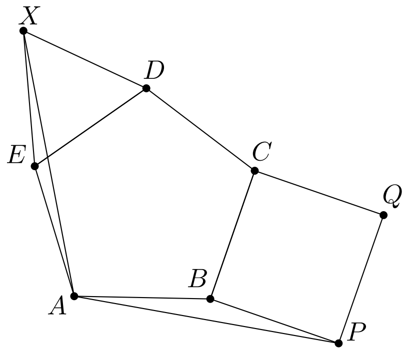
C kategória C+ kategória

C-1. Anna leírta a római számokat 1-től 30-ig növekvő sorrendben. Béla is leírta ugyanezeket a római számokat, de ő ábécé-sorrendben. Hány helyen egyezik meg a két sorrend? (3 pont)

C-2. Mennyi lehet legfeljebb a maradék, ha egy kétjegyű számot elosztunk számjegyei összegével? (3 pont)

C-3. Az Albrecht Dürer Gimnázium 9.c osztályában a fiúk és a lányok közül négyen-négyen szeretik a matekot. Hányféleképpen alakulhat meg az osztály Dürer-csapata, ha a csapatnak három matekot szerető diákból kell állnia és kell legyen benne legalább egy lány (más megkötés nincs és a csapaton belüli sorrend nem számít). (3 pont)

C-4. Az $ABCDE$ szabályos ötszög DE oldalára kifelé megszerkesztettük az EDX szabályos háromszöget. Valamint a BC oldalára kifelé megszerkesztettük a $CBPQ$ négyzetet. Hány fokos a PAX szög? (3 pont)



C-5. Közös végállomásukról az 1-es villamos 6 percenként, a 2-es villamos 10 percenként, a 3-as villamos 15 percenként indul. Átlagosan hány másodpercenként indul villamos a végállomásról? (4 pont)

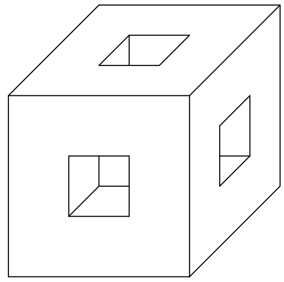
C-6. Hány homorúszöge lehet legfeljebb egy 1471-szögnek? (homorúszögnek nevezzük a 180 foknál nagyobb szöget) (4 pont)

C-7. Mennyi az ab szorzat lehetséges legnagyobb értéke, ha a és b pozitív egész számok és $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$? (4 pont)

C-8. Hányféle téglatestet lehet építeni 20 darab $3 \times 1 \times 1$-es téglatestből? Két téglatest különböző, ha oldalhosszai mások, az nem számít, hogy hogyan építjük össze a kis téglatestekből. (4 pont)

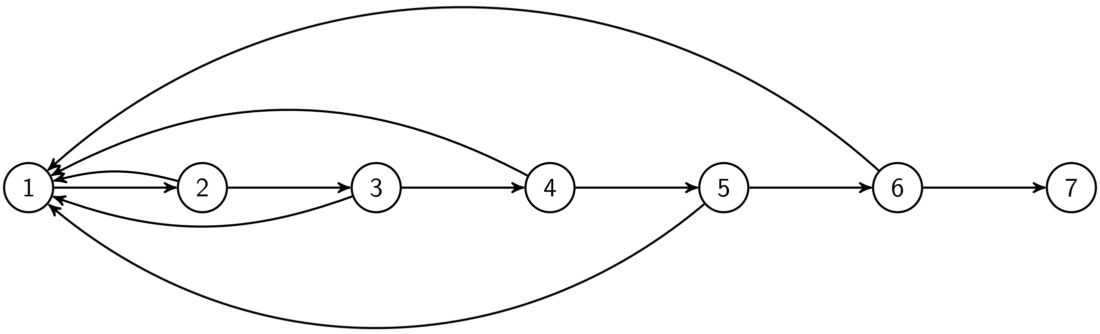
C-9. Kijelölünk 10 pontot egy papírlapon. Ezután egy lépésben össze kell kötnünk két pontot egy görbe vonallal, és rajzolnunk kell egy új pontot a vonalra. Két szabály van: egy pontból legfeljebb három vonal indulhat és két vonal nem metszheti egymást. Legfeljebb hány lépésünk lehet? (5 pont)

C-10. Egy kockából minden élével párhuzamosan kivágtunk egy-egy négyzet alapú hasábot az ábrán látható módon. A hasáb alapjának (a négyzetnek) oldalhossza harmada a kocka élhosszának. Mekkora az így kapott test felszíne dm^2-ben, ha a térfogata 160 dm^3? (5 pont)



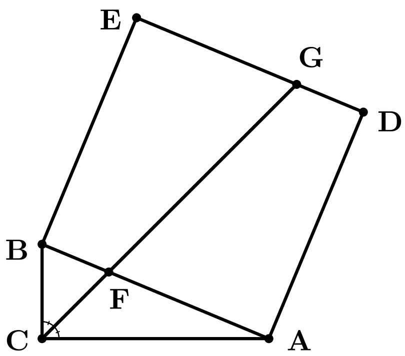
C-11. Legfeljebb hány mezőjét színezhetjük be egy 7×7-es táblázatnak, ha azt szeretnénk, hogy ne legyen négy olyan mező beszínezve, melyek középpontjai a táblázat oldalaival párhuzamos oldalú téglalapot alkotnak? (5 pont)

C-12. Egy hangya sétál az ábrán. Az 1-es pontból indul, és mindig csak a nyílnak megfelelő irányban halad. Bármelyik vonalon 1 percig tart végigmennie. Ha egy pontba érkezik, és ezelőtt páratlan számú alkalommal járt itt, akkor egyenesen továbbmegy az eggyel nagyobb sorszámú pontba. Ellenben, ha ezelőtt páros számú alkalommal járt itt, akkor visszamegy az 1-es pontba. Kivétel ez alól az 1-es pont, ahonnan mindig továbbmegy a 2-esbe, és a 7-es pont, ahol befejezi a sétáját. Hány percig sétál a hangya?

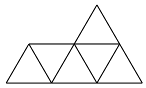


(5 pont)

C-13. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. Állítsunk egy $BADE$ négyzetet az átfogóra. Messe a C csúcsnál levő szögfelező BA-t F-ben és ED-t G-ben. Ha $CA = 24$ és $CB = 10$, mennyi az $ADGF$ négyszög területe? (6 pont)



C-14. Melyik a legkisebb n, hogy egy n cm oldalú szabályos háromszög kirakható az alábbi alakzat néhány példányából? Az alakzat kis háromszögeinek oldala 1 cm.



(6 pont)

C-15. Melyik az a legnagyobb n egész szám, amelyre igaz, hogy egy szabályos n-szög csúcsait ki lehet színezni pirosra és kékre úgy, hogy ne legyen olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek mindhárom csúcsa ugyanolyan színű? (6 pont)

C-16. Néhány település van egy egyenes folyó két partján. Az egyik oldalon 7 település van sorban a parton, míg a másik oldalon 5. Szeretnénk egyenes hidakat építeni, melyek egy-egy települést kötnek össze a két partról. A hidak nem kereszteződhetnek, és el kell tudnunk jutni bármelyik településből bármelyik másikba csak ezen hidak segítségével. A települések között csak hidakon közlekedhetünk. Hányféle elrendezésben építhetjük meg a hidakat? (6 pont)

C-17. Egy 99×99-es sakktábla minden mezejében van egy érme, kezdetben írással felfelé. Egy lépésben kiválaszthatunk egy sorban vagy egy oszlopban négy egymás melletti mezőt, majd az azokon lévő négy érmét megfordítjuk. Hány olyan mező van, melyre elérhető véges sok lépésen belül, hogy csak azon az egy mezőn legyen írás, az összes többin fej? (7 pont)

C-18. Az ABC háromszögben C-nél derékszög van, $AC = 6$, $BC = 8$. Az AB oldal belsején van a D pont felvéve A-tól $30/11$ távolságra. A P pont az ABC körül írt körének C-től különböző metszéspontja a CD egyenessel. Mekkora a CP távolság négyzete? (7 pont)

C-19. Az $1, 2, ..., 101$ számoknak legfeljebb hány olyan nemüres részhalmazát választhatjuk ki, hogy bármelyik két részhalmaz metszete néhány egymást követő szám (az is jó, ha egy darab szám a metszet)? (7 pont)

C-20. 2010-en ülnek egy kerek asztal körül. Andrásnak adunk egy cukrot. Majd elindulunk és az Andrástól jobbra ülő 1. embernek is adunk egy cukrot, majd az $(1 + 2)$.-nak is adunk egy cukrot, majd az $(1 + 2 + 3)$.-nak is adunk egy cukrot, ..., végül az $(1 + 2 + \cdots + 2009)$. embernek is adunk egy cukrot. Hányan kaptak összesen cukrot? (7 pont)

Megoldókulcs:

C-1.	15	C-5.	180	C-9.	29	C-13.	338	C-17.	576
C-2.	15	C-6.	1468	C-10.	288	C-14.	12	C-18.	80
C-3.	52	C-7.	32	C-11.	21	C-15.	8	C-19.	2601
C-4.	111	C-8.	10	C-12.	94	C-16.	210	C-20.	408

Kifejtős forduló

2017. február 10.

Dürer Verseny

Matematika feladatsor

11 - 12. osztályosok

D kategória

---

1. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc 4×4-es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhetett pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát az összes lehetséges értékre, és mutassátok meg, hogy más tényleg nem lehet.

2. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

3. Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Mutassátok meg, hogy

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

4. Egy n tagú baráti társaságnak szervezünk tájfutó versenyt. Összesen n futamot rendezünk, mindegyikben egymás után indul el az n versenyző. Szeretnénk azt, hogy bármely versenyző pontosan egyszer induljon az $1., 2., \ldots, n.$ helyekről. Továbbá azt is szeretnénk, hogy bármely két versenyző (pl.: A és B) pontosan kétszer kövesse egymást közvetlenül, méghozzá egyszer AB, egyszer pedig BA sorrendben.

a) Mutassátok meg, hogy $n = 5$ esetén nem lehet versenyt szervezni a feltételeknek megfelelően.

b) Mutassátok meg, hogy ha n páros, akkor viszont meg lehet szervezni.

5. Az $ABCD$ konvex négyszög A-nál levő $60°$-os szögét az AC átló felezi, továbbá $ACD\sphericalangle = 40°$ és $ACB\sphericalangle = 120°$. A négyszög belsejében a P pont úgy helyezkedik el, hogy $PDA\sphericalangle = 40°$ és $PBA\sphericalangle = 10°$.

a) Mekkora a DPB szög?

b) Bizonyítsátok be, hogy P az AC átlóra esik.

6. Játék: Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot. A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya egy általuk választott sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány szomszédos CÉL mezőt. Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.
2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyit.
3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.

Kifejtős forduló

2017. február 10.

Matematika feladatsor

11 - 12. osztályosok

D+ kategória

1. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

2. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív egészek ($n \geq 4$) egy körön úgy, hogy x_i osztja a két szomszédjának összegét, vagyis $k_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$ egész minden i-re (ahol $x_0 = x_n$ és $x_{n+1} = x_1$). Legyen $S = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

a) Mutassátok meg, hogy $S \geq 2n$.

b) Keressetek $x_1, x_2, \dots x_n$ pozitív egészeket, hogy S minél nagyobb legyen.

c) Bizonyítsatok minél jobb felső korlátot S-re.

3. Hat négyzet összterülete 2 egység. Mutassátok meg, hogy elhelyezhetőek átfedés nélkül egy 2×2-es négyzetben.

4. Adott a síkon véges sok piros, kék és sárga pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Bármely piros háromszögben van kék pont, bármely kék háromszögben van sárga pont, és bármely sárga háromszögben van piros pont.

a) Keressetek minél jobb felső korlátot a pontok számára.

b) Adjatok konstrukciót minél több ponttal.

5. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. A P_b, Q_b, R_b pontok rendre a BC_1, C_1A_1, A_1B szakaszok pontjai úgy, hogy $BP_bQ_bR_b$ paralelogramma. Ugyanígy a P_c, Q_c, R_c pontok rendre a CB_1, B_1A_1, A_1C szakaszok pontjai úgy, hogy $CP_cQ_cR_c$ paralelogramma. A P_bR_b és P_cR_c egyenesek metszéspontja T. Mutassátok meg, hogy $TQ_b = TQ_c$.

6. Játék: Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot. A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya alsó sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány (nem feltétlenül szomszédos) CÉL mezőt. Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.
2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyit.
3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.

Matek megoldókulcs

11 - 12. osztályosok

D kategória D+ kategória

D1. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc 4×4-es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhetett pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát az összes lehetséges értékre, és mutassátok meg, hogy más tényleg nem lehet.

Megoldás: ld. C/1.

D2. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

Megoldás: ld. C/3.

D3. Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Mutassátok meg, hogy

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

Megoldás: Legyen $S = a+b+c$. Először megmutatjuk, hogy $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a}{a+b+c-a}} = \sqrt{\frac{a}{S-a}} \geq 2\frac{a}{S}$. Mindkét oldal pozitív, így négyzetre emelhetünk: $\frac{a}{S-a} \geq 4\frac{a^2}{S^2}$. A nevezőkkel felszorozva (mindkettő pozitív): $aS^2 \geq 4(S-a)a^2$. Végül egy oldalra rendezve:

$$aS^2 - 4(S-a)a^2 = a(S^2 - 4Sa + a^2) = a(S-2a)^2 \geq 0.$$

Ez pedig teljesül, hiszen $a > 0$ és $(S-2a)^2 \geq 0$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $S - 2a = 0$, azaz $a = \frac{S}{2}$. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az eredeti egyenlőtlenség is teljesül, és csak $a = \frac{S}{2}$ esetén teljesül egyenlőség.

Így tehát meg tudjuk becsülni a feladatban szereplő egyenlőtlenség bal oldalát:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2\frac{a}{S}+2\frac{b}{S}+2\frac{c}{S} = 2\frac{a+b+c}{S} = 2.$$

Ezzel beláttuk, hogy a bal oldal legalább 2, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy 2 nem lehet. Ha mégis 2 lenne, akkor az előző egyenlőtlenségekben is egyenlőségeknek kell állniuk, és ez láttuk, hogy akkor teljesül, ha $a = b = c = \frac{S}{2}$. Viszont ekkor $S = a+b+c = \frac{3}{2}S$ lenne, ami nem teljesülhet, hiszen $S > 0$.

D4. Egy n tagú baráti társaságnak szervezünk tájfutó versenyt. Összesen n futamot rendezünk, mindegyikben egymás után indul el az n versenyző. Szeretnénk azt, hogy bármely versenyző pontosan egyszer induljon az $1., 2., \ldots, n.$ helyekről. Továbbá azt is szeretnénk, hogy bármely két versenyző (pl.: A és B) pontosan kétszer kövesse egymást közvetlenül, méghozzá egyszer AB, egyszer pedig BA sorrendben.

a) Mutassátok meg, hogy $n = 5$ esetén nem lehet versenyt szervezni a feltételeknek megfelelően.

b) Mutassátok meg, hogy ha n páros, akkor viszont meg lehet szervezni.

Megoldás: Egy $n \times n$-es táblázattal adjuk meg a verseny szervezését. A versenyzőket jelöljük $1, 2, \ldots, n$-nel. A táblázat i. sorának j. eleme jelöli, hogy az i. futamon melyik versenyző indul a j. helyről. Minden sorban minden szám szerepel egyszer, hiszen egy futamon el kell indulnia mindenkinek. És minden oszlopban is szerepel minden szám egyszer, hiszen mindenki indul minden helyről. Az így megadott táblázat egy úgynevezett *Latin-négyzet.* Ám a miénktől még azt is elvárjuk, hogy bármilyen (k, l) különböző számokból álló párra van olyan i és j, hogy a táblázat i. sorában a j. mező épp k, a $j+1$. pedig épp l.

a) Mivel a sorok tetszés szerint átrendezhetőek, ezért feltehetjük, hogy az 1-es számú versenyző az i. versenyen az i. helyről indul. Szintén feltehetjük (a versenyzők esetleges átszámozásával), hogy az első futamon az indulók sorrendje: 1, 2, 3, 4, 5. Most nézzük a 2. futamon a 3., a 3. futamon a 4., és a 4. futamon az 5. versenyzőt. Ezeket a táblázatban most x-szel jelöltük.

1	2	3	4	5
	1	x		
		1	x	
			1	x
				1

Közvetlenül az 1. versenyző után a 2. már indult, így a három x helyére a 3, 4, 5 kerül valamilyen sorrendben. Mivel a 3. oszlopban van már 3-as, így oda az nem kerülhet. Ha 4 kerül, akkor a 4. oszlopba már csak 5 kerülhet, az 5.-be pedig 3. Ha viszont 5 kerül, akkor a 4. oszlopba már csak a 3 kerülhet, az 5.-be pedig 4. Vagyis az három x helyére sorban a 4, 5, 3, vagy az 5, 3, 4 kerül.

Mindkét esetben a táblázat kitöltése egyértelmű, ha csak arra figyelünk, hogy Latin-négyzet legyen. (Ám közben ellentmondásra fogunk jutni az extra feltételünkkel.) A kitöltést könnyű elvégezni például úgy, hogy választunk egy sort vagy egy oszlopot, melyből legfeljebb kettő elemet nem ismerünk, és ezeket ki tudjuk találni. Ezen lépések segítségével egy-egy kitöltése az első táblázatnak:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 4 & & \\ & & 1 & 5 & \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 4 & & 2 \\ & & 1 & 5 & 4 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 4 & 3 & 2 \\ & & 1 & 5 & 4 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 4 & 3 & 2 \\ & & 1 & 5 & 4 \\ & & 2 & 1 & 3 \\ & & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

Itt már megkaptuk az ellentmondást (4. és 5. sorban is 2 és 1 egymás után). A kitöltést csak azért fejezzük be, hogy meggyőződjünk, hogy tényleg egyértelmű.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ & & 2 & 1 & 3 \\ & & 5 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a másik esetben a táblázat egyetlen lehetséges kitöltése (ha csak arra figyelünk, hogy Latin-négyzet legyen):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

Ez is több ponton megsérti az extra feltételünket, például az 1. és a 2. sorban is van 2 és 3 egymás mögött.

b) Most pedig megmutatjuk, hogy van alkalmas kitöltés, ha $n = 2m$, ahol $m \in \mathbb{N}^+$.

Először megadjuk a konstrukciót, aztán megmutatjuk, hogy helyes.

Legyen az első sor: $1, 2m, 2, 2m-1, 3, 2m-2, \dots, m-1, m$. Ezután az i. sort úgy kapjuk, hogy az első sor minden eleméhez $(i-1)$-et adunk, és az így kapott számnak vesszük a $2m$-es maradékát (0 helyett $2m$-et).

Az látható, hogy az első sorban minden elem pontosan egyszer szerepel, és mivel ugyanazt adjuk hozzájuk, ezért minden sorban is minden elem pontosan egyszer szerepel. Az is könnyen látszik, hogy minden oszlopban minden elem pontosan egyszer szerepel, hiszen az első sorban szereplőhöz adtunk 1-et, 2-t, 3-at, …, $(2m-1)$-et $\pmod{2m}$, vagyis megkaptuk az összes maradékot pontosan egyszer.

Már csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges (k, l) pár megtalálható szomszédos mezőkön.

Ehhez először megmutatjuk, hogy az első sorban bármely $d \in 1, 2, \dots 2m-1$ előáll valamely két szomszédos elem különbségeként (a jobb oldaliból kivonva a bal oldalit modulo $2m$). Ha párosadik helyen szereplő elemből vonjuk ki az előzőt: $2m-1$, $(2m-1)-2 = 2m-3$, $(2m-2)-3 = 2m-5$, …, $m-(m-1) = 1$, vagyis megkapjuk az összes páratlan számot. Ha páratlanadik helyen szereplő elemből vonjuk ki az előzőt: $2-2m \equiv 2$, $3-(2m-1) \equiv 4$, $4-(2m-2) \equiv 6$, …, $(m-1)-(m+1) \equiv 2m-2$, vagyis megkaptuk az összes páros számot is (a 0-t természetesen nem).

Most pedig megmutatjuk, hogy tetszőleges (k, l) pár megtalálható szomszédos mezőkön. Legyen $d \equiv l - k \pmod{2m}$. Ekkor az első sorban keressük meg, melyik két szomszédos mező különbsége lesz d, legyenek ezek a j. és $(j+1)$., a rajtuk szereplő szám pedig a_j és a_{j+1}, vagyis $a_{j+1} - a_j \equiv d \equiv l - k$. Most menjünk le a $(k - a_j + 1)$. sorba, és nézzük itt szintén a j. és $(j+1)$. elemet. A táblázat képzési szabálya miatt előbbi $a_j + (k - a_j) \equiv k$, utóbbi $a_{j+1} + (k - a_j) \equiv k + (a_{j+1} - a_j) \equiv k + (l - k) = l$ lesz, és így készen is vagyunk.

D5. Az $ABCD$ konvex négyszög A-nál levő $60°$-os szögét az AC átló felezi, továbbá $ACD\sphericalangle = 40°$ és $ACB\sphericalangle = 120°$. A négyszög belsejében a P pont úgy helyezkedik el, hogy $PDA\sphericalangle = 40°$ és $PBA\sphericalangle = 10°$.

a) Mekkora a DPB szög?

b) Bizonyítsátok be, hogy P az AC átlóra esik.

Megoldás: a) Mivel az A-nál lévő szöget felezi az AC átló, ezért $CAB\sphericalangle = 30°$. Az ABC háromszögben a szögek összege $180°$, ezért $ABC\sphericalangle = 30°$.

Ebből pedig az következik, hogy $PBC\sphericalangle = 20°$. Másik oldalon kijön ugyanígy, hogy $PDC\sphericalangle = 70°$. Most nézzük a $PBCD$ négyszöget.

A belső szögek összege itt $360°$ lesz, azaz kijön, hogy a $DPB\sphericalangle = 110°$.

b) Tegyük fel, hogy a P pont nincs az átlón. Ekkor legyen az átló és a BP egyenes metszéspontja P_1, az átló és a DP egyenes metszéspontja P_2.

Most belátjuk, hogy $CP_1 = CP_2$. Ez azt jelentené, hogy nem igaz a feltevésünk.

Az látható, hogy a $CP_2 = CD$, mivel a CDP_2 háromszög egyenlő szárú. Még azt kell belátni, hogy $CD = CP_1$.

Vegyük észre azt, hogy $BC = AC$, mivel $ABC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. Írjunk fel két szinusz-tételt a BCP_1 háromszögre és az ACD háromszögre.

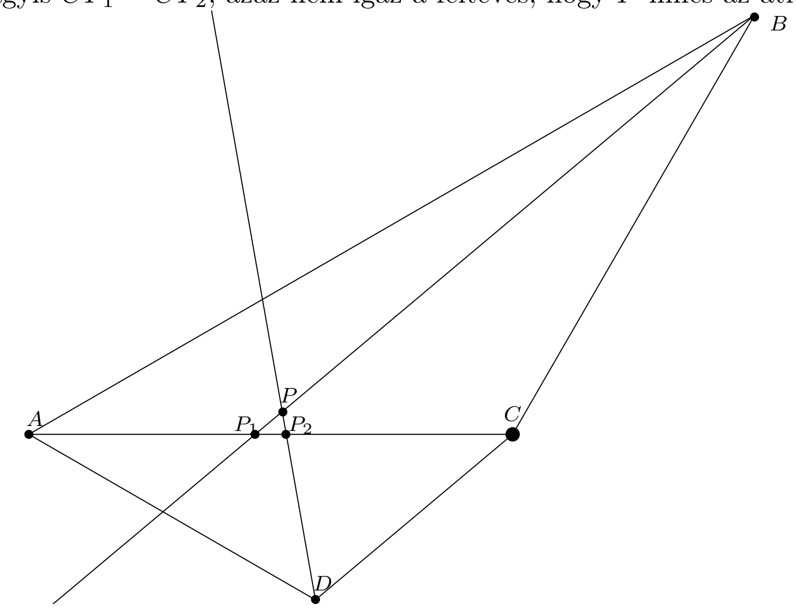
Felhasználva hogy $AC = BC$, az jön ki, hogy a CP_1, akkor lesz egyenlő a CD-vel, ha $\frac{\sin 30°}{\sin 110°} = \frac{\sin 20°}{\sin 40°}$.

Ezt átrendezve:

$$\frac{1/2}{\sin 70°} = \frac{\sin 20°}{2 \sin 20° \cos 20°}.$$

Átalakítva: $\sin 70° = \cos 20°$, ez pedig igaz.

Vagyis $CP_1 = CP_2$, azaz nem igaz a feltevés, hogy P nincs az átlón.



D+1. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

Megoldás: ld. C/3.

D+2. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív egészek ($n \geq 4$) egy körön úgy, hogy x_i osztja a két szomszédjának összegét, vagyis $k_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$ egész minden i-re (ahol $x_0 = x_n$ és $x_{n+1} = x_1$). Legyen $S = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

a) Mutassátok meg, hogy $S \geq 2n$.

b) Keressetek $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitív egészeket, hogy S minél nagyobb legyen.

c) Bizonyítsatok minél jobb felső korlátot S-re.

Megoldás: a)

$$S = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1} + x_{i-1}}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}}{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+1}}{x_i} \right).$$

A zárójelekben pozitív szám és reciprokának összege szerepel, így mindegyik legalább kettő, vagyis

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n.$$

b) Legyen $x_i = i$. Ekkor $k_i = \frac{(i-1)+(i+1)}{i} = 2$, ha $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Továbbá $k_1 = \frac{n+2}{1}$, $k_n = \frac{(n-1)+1}{n} = 1$, vagyis mindegyik egész, és $S = 1 + 2(n-2) + n + 2 = 3n - 1$.

c) Megmutatjuk, hogy $S \leq 3n - 1$, vagyis a **b)** részben talált érték nem javítható. Ezt n szerinti indukcióval fogjuk megmutatni. A feladat értelemszerűen kiterjeszthető az $n \leq 3$ esetekre is, és például $n = 2$-re triviális az állítás.

Most tegyük fel, hogy $n-1$-re már beláttuk az állítást. Megmutatjuk, hogy n-re is igaz. Keressünk egy maximális értékű x_i-t, szimmetria miatt feltehető, hogy ez x_n. Ekkor két esetet különböztetünk meg: x_n vagy megegyezik valamelyik szomszédjával, vagy szigorúan nagyobb mindkettőnél.

1. eset: $x_n = x_1$. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben minden i-re $x_i = x_n$. Tegyük fel, hogy azt már tudjuk, hogy $x_n = x_1 = x_2 = \cdots = x_i$. Ekkor nézzük x_{i+1}-et. Mivel $1 \leq x_{i+1} \leq x_n$, így $x_n + 1 \leq x_{i-1} + x_{i+1} \leq x_n + x_n$, ugyanakkor $x_{i-1} + x_{i+1}$ osztható $x_i = x_n$-nel, így az egyetlen szóbajöhető értéke: $x_{i-1} + x_{i+1} = 2x_n$, vagyis $x_{i+1} = x_n$. Tehát ekkor minden x_i megegyezik, így minden $k_i = 2$, és $S = 2n \leq 3n - 1$.

2. eset: $x_{n-1} < x_n > x_1$. Ekkor megmutatjuk, hogy az $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ számok $(n-1)$-re kielégítik a feladat feltételeit (az új hányadosokat jelöljük k'_i-vel), így majd használhatjuk az indukciót. Ha $i \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$, és x_i-vel osztunk, akkor a hányados nem változik, így ezekre teljesül a feltétel, és $k'_i = k_i$. Csak azt kell megmutatni, hogy $x_1 \mid x_2 + x_{n-1}$, és $x_{n-1} \mid x_{n-2} + x_1$.

Feltevésünk szerint $x_n \mid x_1 + x_{n-1} < x_n + x_n$, így szükségképpen $k_n = 1$, azaz $x_n = x_1 + x_{n-1}$. Ezt felhasználva: $k'_1 = \frac{x_2+x_{n-1}}{x_1} = \frac{x_2+x_n-x_1}{x_1} = k_1 - 1$, vagyis egész a hányados, tehát az oszthatóság teljesül. Ugyanígy $k'_{n-1} = \frac{x_{n-2}+x_1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}+x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}} = k_{n-1} - 1$ is egész.

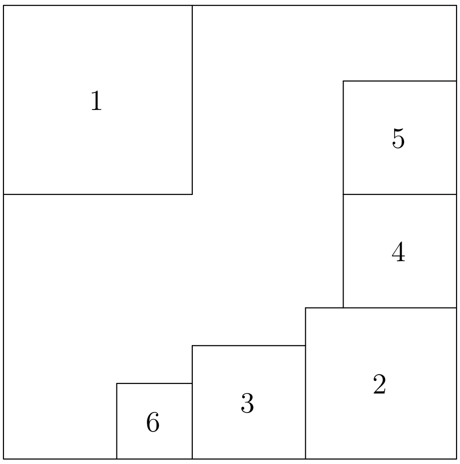
Alkalmazhatjuk az indukciót:

$$3(n-1) - 1 \geq k'_1 + k'_2 + \cdots + k'_{n-2} + k'_{n-1} = k_1 - 1 + k_2 + \cdots + k_{n-2} + k_{n-1} - 1 = S - k_n - 2 = S - 3,$$

átrendezve $S \leq 3n - 1$, épp amit akartunk.

D+3. Hat négyzet összterülete 2 egység. Mutassátok meg, hogy elhelyezhetőek átfedés nélkül egy 2×2-es négyzetben.

Megoldás: Nevezzük el így a hat négyzet oldalhosszait csökkenő sorrendben: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.



Belátjuk, hogy az ábrán látható módon elhelyezhetők ezek a négyzetek. Ehhez a következő egyenlőtlenségeket kell belátnunk: **a)** $x_1 + x_2 \leq 2$, **b)** $x_2 + x_3 + x_6 \leq 2$ és **c)** $x_2 + x_4 + x_5 \leq 2$

a) Az $x_1^2+x_2^2 \leq 2$ egyenlőtlenségből fogjuk belátni az $x_1+x_2 \leq 2$ egyenlőtlenséget. Elég megmutatni, hogy $(x_1+x_2)^2 \leq 4$, ami azzal ekvivalens, hogy $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \leq 4$. Hogy ezt belássuk, elég megmutatni, hogy $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2$. Ez pedig igaz, hiszen $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \leq 4$

Most belátunk egy hasznos segédállítást. Ha két szám négyzetösszege adott és szeretnénk a két szám összegét maximalizálni, akkor a két számot egyenlőnek kell választani. Legyen $a^2+b^2 = c$. $(a+b)$ akkor maximális ha $(a+b)^2$ maixmális. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = c+2ab$. Vagyis $a+b$ akkor maximális, ha $2ab$ a lehető legnagyobb. Azt tudjuk, hogy $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \geq 0$. Tehát $2ab$ legfeljebb $a^2+b^2 = c$. Ez el is érhető az $a = b$ esetben, tehát ekkor maximális $(a + b)$.

b) Azt szeretnénk belátni, hogy $x_2 + x_3 + x_6 \leq 2$. Ehhez gondoljuk meg, hogy melyik esetben a lehető legnagyobb az $x_2 + x_3 + x_6$ összeg. Belátjuk, hogy pontosan akkor, ha $x_1 = x_2 = x_3$. Ha x_1 nem egyenlő x_2-vel, akkor a segédállításunk alapján tudjuk növelni az összeget, ha x_1-et csökkentjük és x_2-t növeljük. Tehát $x_1 = x_2$ szükséges a maximalitáshoz. Ha x_2 nem egyenlő x_3-mal, akkor tudjuk növelni az összeget x_2 és x_3 egyenlővé tételével. Tehát $x_1 = x_2 = x_3$.

Hasonló módon meggondolható, hogy csak akkor lehet maximális $x_2 + x_3 + x_6$, ha $x_4 = x_5 = x_6$. Legyen $x_1 = x_2 = x_3 = a$ és $x_4 = x_5 = x_6 = b$. Ekkor $3(a^2 + b^2) = 2$, és azt szeretnénk belátni, hogy $2a + b \leq 2$. Legyen $c = \frac{a}{2}$. Ekkor az előzőek alapján $4c^2 + b^2 = \frac{2}{3}$, és célunk belátni, hogy $4c + b \leq 2$. Alkalmazzunk egy számtani-négyzetes egyenlőtlenséget az c, c, c, c, b számokra: $\sqrt{(4c^2 + b^2)/5} \geq (4c+b)/5$. Ebből azt kapjuk, hogy $(4c + b) \leq 5\sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{5}} \leq 2$.

c) Hasonló módszerekkel megmutatjuk, hogy $x_2 + x_4 + x_5 \leq 2$. Megint gondoljuk meg, hogy ez az összeg mikor lehet maximális. Azt látjuk be, hogy ez csak akkor lehet maximális, ha $x_1 = x_2$. Ha x_1 nem egyenlő x_2-vel, akkor tudjuk növelni az összeget x_1 csökkentésével és x_2 növelésével a segédállítás alapján.

Másrészt, csak akkor lehet legnagyobb az összeg, ha $x_3 = x_4 = x_5$. Ha x_3 nem egyenlő x_4-gyel, akkor tudjuk növelni az összeget x_3 csökkentésével és x_4 növelésével. Ha x_4 nem egyenlő x_5-tel, akkor tudjuk növelni az összeget x_4 és x_5 egyenlővé tételével.

Valamint akkor lehet csak a legnagyobb az összeg, ha $x_6 = 0$. (Ha nem nulla, akkor tudjuk x_6-ot csökkenteni és a többi tagot növelni.) Ezek alapján vegyük a maximális esetet, és legyen $x_1 = x_2 = a$, $x_3 = x_4 = x_5 = b$. Ekkor a négyzetek területe $2a^2 + 3b^2 = 2$, és azt kell belátni, hogy $a + 2b \leq 2$. Ezek ekvivalensek azzal, hogy $12a^2 + 18b^2 = 12$, és azt kell belátni, hogy $6a + 12b \leq 12$. Válasszuk meg c-t és d-t úgy, hogy $c = 2a$ és $2d = 3b$. Ekkor $3c^2 + 8d^2 = 12$, és azt szeretnénk belátni, hogy $3c + 8d \leq 12$. Alkalmazzunk egy számtani-négyzetes egyenlőtlenséget a $c, c, c, d, d, d, d, d, d, d, d$ számokra: $\sqrt{\frac{3c^2+8d^2}{11}} \geq \frac{3c+8d}{11}$. Azaz $3c + 8d \leq 11\sqrt{\frac{3c^2+8d^2}{11}}$. A jobb oldal kisebb mint 12, mivel négyzetreemelés után azt kapjuk, hogy $132 \leq 144$. Tehát $3d + 8c \leq 12$.

Ezek alapján igazak az egyenlőtlenségek, azaz el lehet helyezni a hat négyzetet.

D+4. Adott a síkon véges sok piros, kék és sárga pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Bármely piros háromszögben van kék pont, bármely kék háromszögben van sárga pont, és bármely sárga háromszögben van piros pont.

a) Keressetek minél jobb felső korlátot a pontok számára.

b) Adjatok konstrukciót minél több ponttal.

Megoldás: ld. C+/5.

D+5. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. A P_b, Q_b, R_b pontok rendre a BC_1, C_1A_1, A_1B szakaszok pontjai úgy, hogy $BP_bQ_bR_b$ paralelogramma. Ugyanígy a P_c, Q_c, R_c pontok rendre a CB_1, B_1A_1, A_1C szakaszok pontjai úgy, hogy $CP_cQ_cR_c$ paralelogramma. A P_bR_b és P_cR_c egyenesek metszéspontja T. Mutassátok meg, hogy $TQ_b = TQ_c$.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a T pont három körnek a közös hatványpontja. Ezen három kör a háromszög k beírt köre, illetve a Q_b és a Q_c, mint pontkörök. Ha ezt beláttuk, abból nyilvánvalóan következik a feladat állítása.

Ehhez először megmutatjuk, hogy k és Q_c hatványvonala P_cR_c, mégpedig úgy, hogy mind P_c-ből, mind R_c-ből ugyanakkora lesz a pontok körre vonatkozó hatványa.

Mivel A_1 és B_1 a beírt kör érintési pontjai, így $|A_1C| = |B_1C|$, és így $B_1A_1C\sphericalangle = A_1B_1C\sphericalangle$. A paralelogramma oldalai párhuzamosak, így $B_1Q_cP_c\sphericalangle = B_1A_1C\sphericalangle = A_1B_1C\sphericalangle = A_1Q_cR_c\sphericalangle$, emiatt pedig $B_1P_cQ_c$ és $Q_cR_cA_1$ is egyenlőszárú háromszög, vagyis $|B_1P_c| = |Q_cP_c|$ és $|Q_cR_c| = |A_1R_c|$.

P_c-ből a Q_c körre vonatkozó hatványa $|P_cQ_c|^2$, míg k-ra vonatkozó hatványa $|B_1P_c|^2$, hiszen a P_c-ből húzott érintő B_1-ben érinti a kört. Mint láttuk, ez a két érték megegyezik, így P_c rajta van a hatványvonalon. Hasonlóan R_c Q_c-re vonatkozó hatványa $|R_cQ_c|^2$, míg k-ra vonatkozó hatványa $|A_1R_c|^2$, melyek szintén megegyeznek, így R_c is rajta van a hatványvonalon, vagyis a hatványvonal megegyezik P_cR_c-vel.

Ugyanígy kaphatjuk, hogy k és Q_b hatványvonala P_bR_b, vagyis a három kör közös hatványpontja a két egyenes metszéspontja, azaz a T pont. Emiatt $|Q_bT|^2 = |Q_cT|^2$, és épp ezt akartuk belátni.

Döntő

2017. február 11.

Váltóverseny

11- 12. osztályosok

D kategória D+ kategória

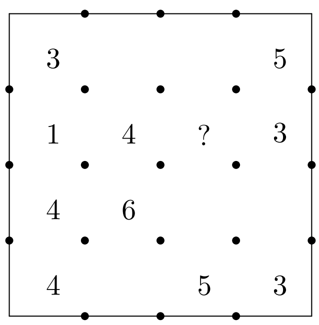
D-1. Anna leírta a római számokat 1-től 30-ig növekvő sorrendben. Béla is leírta ugyanezeket a római számokat, de ő ábécé-sorrendben. Hány helyen egyezik meg a két sorrend? (3 pont)

D-2. Egy autó 100 kilométeren kétszer annyit fogyaszt, ha 120 km/h-val megy, mint ha 30 km/h-val menne. Ha 120-szal két órát tud menni egy tank benzinnel, akkor 30-cal hány percenként kell megállnia tankolni? (3 pont)

D-3. Az Albrecht Dürer Gimnázium 11.D osztályában a fiúk és a lányok közül is tízen-tízen szeretik a matekot. Hányféleképpen alakulhat meg az osztály Dürer-csapata, ha a csapatnak három matekot szerető diákból kell állnia, és kell, hogy legyen benne legalább egy lány. (Más megkötés nincs, és a csapaton belüli sorrend nem számít.) (3 pont)

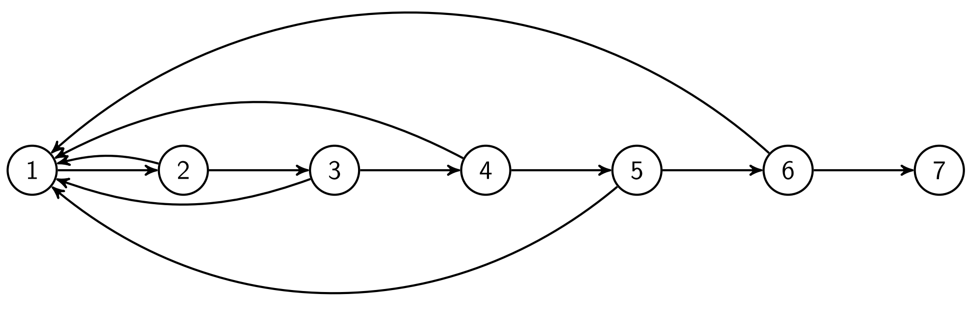
D-4. Négy egész számból mind a hatféle páronkénti szorzatot kiszámítottuk. A hat szorzat közül ötnek az értéke: 20, 30, 40, 50, 60. Mennyi a hatodik szorzat értéke? (3 pont)

D-5. Az ábrán a Dürer Kreatív Névkitaláló Kft. irodájának alaprajza látható. A pontok oszlopokat jelölnek, melyek segítségével 16 egyforma négyzet alakú mezőre fel lehet osztani az irodát. Minden ilyen mezőben egy ember dolgozik. Néhány szomszédos oszlop közé kelet-nyugati vagy észak-déli irányú falakat is építettek, bár ezeket (az iroda külső falán kívül) az ábrán nem jelöltük. Egy mezőn ülő ember északi, déli, nyugati, illetve keleti irányban látja az összes kollégáját, kivéve ha valahol falat építettek kettőjük közé. Néhány mezőre rá is írtuk, hogy az ott ülő hány munkatársát látja. Milyen számot írhatunk a kérdőjeles mezőre? (4 pont)



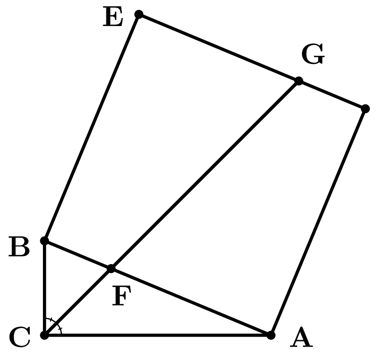
D-6. Melyik az a legnagyobb n egész szám, melyre bármilyen pozitív egész k esetén 2016^n osztja a $k(k+1)(k+2)\cdots(k+2015)$ szorzatot? (4 pont)

D-7. Egy hangya sétál az ábrán. Az 1-es pontból indul, és mindig csak a nyílnak megfelelő irányban halad. Bármelyik vonalon 1 percig tart végigmennie. Ha egy pontba érkezik, és ezelőtt páratlan számú alkalommal járt itt, akkor egyenesen továbbmegy az eggyel nagyobb sorszámú pontba. Ellenben, ha ezelőtt páros számú alkalommal járt itt, akkor visszamegy az 1-es pontba. Kivétel ez alól az 1-es pont, ahonnan mindig továbbmegy a 2-esbe, és a 7-es pont, ahol befejezi a sétáját. Hány percig sétál a hangya? (4 pont)



D-8. Egy egyenes henger alakú vödör alapjának területe 450 cm^2. A vödörbe valamennyi vizet töltünk, majd ebbe egy téglatestet állítunk, amelynek van 18 cm-es és 20 cm-es éle is, a harmadik élhosszat nem ismerjük. Ha a 18 cm-es él áll függőlegesen, akkor 12 cm a vízszint. Ha a 20 cm-es él áll függőlegesen, akkor 10 cm a vízszint. Hány cm magas a vízszint, ha a harmadik él áll függőlegesen? (4 pont)

D-9. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. Állítsunk egy $BADE$ négyzetet az átfogóra. Messe a C csúcsnál levő szögfelező BA-t F-ben és ED-t G-ben. Ha $CA = 24$ és $CB = 10$, mennyi az $ADGF$ négyszög területe? (5 pont)



D-10. Melyik az a legkisebb pozitív egész k szám, melyre teljesül, hogy ha akárhogyan is van megadva véges sok (nem feltétlenül különböző) szám a $[0, 1]$ intervallumból, melyek összege 2017, akkor szét lehet osztani ezeket a számokat k (esetleg üres) csoportba, hogy minden csoportban legfeljebb 1 legyen az összeg? (5 pont)

D-11. Melyik az a legnagyobb n egész szám, amelyre igaz, hogy egy szabályos n-szög csúcsait ki lehet színezni pirosra és kékre úgy, hogy ne legyen olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek mindhárom csúcsa ugyanolyan színű? (5 pont)

D-12. Egy 8×8-as sakktáblára pakolunk alakú triminókat átfedés nélkül. Mennyi a lehető legkevesebb triminó, amit feltehetünk úgy, hogy többet már ne lehessen feltenni? (5 pont)

D-13. Egy 2017×1729-es táblázat mezőibe kétszer beírtuk 1-től $2017 \cdot 1729$-ig az egész számokat nagyság szerinti sorrendben. Először soronként felülről lefelé és azon belül soronként balról jobbra, másodszor pedig oszloponként balról jobbra és azon belül oszloponként felülről lefelé. Hány mezőbe került ugyanaz a szám a két kitöltés során? (6 pont)

D-14. Egy 99×99-es sakktábla minden mezejében van egy érme, kezdetben írással felfelé. Egy lépésben kiválaszthatunk egy sorban vagy egy oszlopban négy egymás melletti mezőt, majd az azokon lévő négy érmét megfordítjuk. Hány olyan mező van, melyre elérhető véges sok lépésen belül, hogy csak azon az egy mezőn legyen írás, az összes többin pedig fej? (6 pont)

D-15. Az ABC háromszögben C-nél derékszög van, $AC = 6$, $BC = 8$. Az AB oldal belsején van a D pont felvéve A-tól 30/11 távolságra. A P pont az ABC háromszög körül írt körének C-től különböző metszéspontja a CD egyenessel. Mekkora a CP távolság négyzete? (6 pont)

D-16. Néhány ember sorban áll a buszmegállóban. Öt egymás mögött állót sorban megkérdeztünk, és ezeket mondták:

1. Mögöttem kétszer annyi lány áll, mint előttem.
2. Mögöttem ugyanannyi lány áll, mint amennyi fiú előttem.
3. A közvetlen mögöttem álló két ember különböző nemű.
4. Mögöttem ugyanannyi fiú áll, mint amennyi lány előttem.
5. Előttem és utánam ugyanannyi fiú áll.

Legfeljebb hányan állhatnak a buszmegállóban? (6 pont)

D-17. Egy egyenes folyó két partján található néhány település. Az egyik oldalon 11 van sorban a parton, míg a másik oldalon 7. Szeretnénk egyenes hidakat építeni, melyek egy-egy települést kötnek össze a két partról. A hidak nem keresztezhetik egymást, és el kell tudnunk jutni bármelyik településből bármelyik másikba csak ezen hidak segítségével. A települések között csak hidakon közlekedhetünk. Hányféle elrendezésben építhetjük meg a hidakat? (7 pont)

D-18. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ valós számok, melyekre $0 \leq x_i \leq i$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$. Ekkor mi az alábbi kifejezés maximális értéke?

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{10}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots x_{10}x_1x_2)$$

(7 pont)

D-19. 2010-en ülnek egy kerek asztal körül. Andrásnak adunk egy cukrot. Majd elindulunk és az Andrástól jobbra ülő 1. embernek is adunk egy cukrot, majd az $(1+2)$.-nak is adunk egy cukrot, majd az $(1+2+3)$.-nak is adunk egy cukrot, $\ldots$, végül az $(1+2+\cdots+2009)$. embernek is adunk egy cukrot. Hányan kaptak összesen cukrot? (7 pont)

D-20. Hány olyan $0 < n < 3^8$ egész szám van, melyre teljesül, hogy a $0 \leq k \leq \frac{n}{3}$ egész számok közül pontosan 216 olyan van, melyre $\frac{n!}{(n-3k)! \cdot k! \cdot 3^{k+1}}$ nem egész? (7 pont)

Megoldókulcs:

D-1.	15	D-5.	3	D-9.	338	D-13.	289	D-17.	8008
D-2.	960	D-6.	334	D-10.	4033	D-14.	576	D-18.	2379
D-3.	1020	D-7.	94	D-11.	8	D-15.	80	D-19.	408
D-4.	24	D-8.	16	D-12.	11	D-16.	22	D-20.	420