Válogatás a Dürer Verseny feladataiból

I.

1. *Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt:* 6 *ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!*

Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?

(II. Dürer Verseny, Döntő, 2009, 7-8. osztályosoknak)

2. *Az iskolai focibajnokság egy csoportjában 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért* 3*, vereségért* 0*, döntetlenért* 1 *pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pénzfeldobással döntenek). Az egyik csapat edzője a bajnokság megkezdése előtt a következőket írta a táblára:*

1. *Ha legalább a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.*
2. *Legalább b pontot el kell érnünk, hogy legyen esélyünk továbbjutni.*
3. *A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c.*
4. *d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.*

Mennyi a, b, c *és* d *értéke, ha az edző nem hibázott?*

(VI. Dürer Verseny, Levelező, 2011, 7-8. osztályosoknak)

3. *Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé legfeljebb k új számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy megválaszthatjuk k-t úgy, hogy a fenti művelet segítségével minden irracionális számot racionálissá tehetünk. Mi a k lehető legkisebb értéke, amellyel ezt még elérhetjük?*

(IV. Dürer Verseny, Döntő, 2011, 11-12. osztályosoknak)

Megjegyzés: Az előadáson nem hangzott el a következő érdekes kérdés.

- Ha véletlenszerűen választunk egy számot, mennyi az esélye, hogy a választott szám d-kritikus lesz?

4. *Le lehet-e fedni egy* 2010×2010*-es négyzetet, a tetrisből ismert L-betűkkel? És egy* 2010×2012*-es téglalapot* T*-betűkkel?*

(III. Dürer Verseny, Döntő, 2010, 11-12. osztályosoknak)

II.

5. *Dürer összes vagyona* 10 *velencei dukát. Tudja, hogy a firenzei pénzváltóban* 3 *dukátért cserébe adnak* 4 *firenzei aranyforintot, a velencei pénzváltóban pedig* 3 *aranyforintért adnak* 2 *dukátot. Elérheti-e Dürer, hogy legalább* 100 *dukátja legyen?*

(VI. Dürer Verseny, Döntő, 2013, 11-12. osztályosoknak)

Megoldás: Sosem gazdagodhat meg Dürer. A bizonyításhoz egy invariáns mennyiséget fogunk bevezetni. Legyen a nálunk lévő aranyforintok száma F, a dukátoké pedig D. Vizsgáljuk a következő összeget:

$$S = 3F + 4D.$$

Megmutatjuk, hogy S sosem nő az átváltások során. Ennek igazolásához az alábbi két esetet kell megvizsgálnunk:

- Ha forintot váltunk, akkor az összeg $3 \cdot (-3) + 4 \cdot (+2) = -9 + 8 = -1$-gyel változik, azaz csökken.
- Ha dukátot váltunk, akkor az összeg változása $3 \cdot (+4) + 4 \cdot (-3) = -12 + 12 = 0$, azaz az összeg nem változik.

Tehát S valóban nem nő a folyamat során. Kezdetben 40 volt. Ha 100 dukátunk van, akkor $S = 400$, így valóban nem érhetjük el, hogy 100 dukátunk legyen.

6. *Niki, Viktória és Győző játszanak. Felváltva lépnek, egy lépésben* 1*-et vagy* 2*-t adnak hozzá az aktuális számhoz. A játék* 0*-ról indul, a játékot Niki kezdi, és utána Viktória, Győző, Niki, stb. sorrendben folytatják. Az nyer, akinél az összeg éppen* 100 *lesz. A második helyezett pedig a győztes után sorban következő személy lesz (például, ha Győző nyer, akkor Niki a második és Viki a harmadik). Ki nyer, ha mindenki a lehető legjobb stratégiával játszik, és a lehető legjobb helyezésre törekszik?*

(III. Dürer Verseny, Levelező, 2010, 7-8. osztályosoknak)

Megoldás: Indukciót fogunk alkalmazni. Vizsgáljuk meg azokat a(z egyszerűbb) játékokat, ahol az elérendő összeg kisebb. Legyenek az elérendő összegek rendre $1, 2, \ldots k-1$. Készítsünk egy táblázatot, és írjuk az elérendő összegek mellé, hogy melyik játékos nyeri az adott játékot. A neveik helyett - a későbbi könnyebb érthetőség kedvéért - azt írjuk, hogy hanyadikként kezdték a játékot. Sorban megvizsgálva a kisebb eseteket a következő adódik:

Cél	1	2	...	10	11	12
1. hely	I.	I.	...	I.	II.	?
2. hely	II.	II.	...	II.	III.	?

Mi a helyzet 12 esetén?

A kezdő játékos lépése tízféle lehet. A kezdő az elérendő összeget (azaz a 12-t) a $11, 12, 13, \ldots 2$ számok valamelyikére csökkentheti. Az első játékos lépése után, a második játékos (azaz Viki) kerül a kezdő helyzetébe. Nézzük meg, hogy melyik számnál ki nyer. A 2-től 10-ig a kezdő nyer (azaz jelen esetben Viki), 11-nél pedig a kezdőt követő második játékos (azaz jelen esetben Győző). Niki a két lehetőség közül a neki kedvezőbbet választja, tehát egyet mond, ezzel Győző nyer, ő pedig a második helyen végez. Ezzel a logikával folytassuk a táblázat kitöltését.

Cél	1	2	...	10	11	12	13	...	22	23	24	...	k-10	...	k-2	k-1	k
1. hely	I.	I.	...	I.	II.	III.	I.	...	I.	II.	III.	...	I.	...	I.	II.	
2. hely	II.	II.	...	II.	III.	I.	II.	...	II.	III.	I.	...	II.	...	III.	III.	

Miért is így néz ki a táblázat?

Nézzük, hogy mi a helyzet, ha az elérendő összeg k. Tegyük fel, hogy $(k-1)$-ig már tudjuk. A kezdő játékos lépése tízféle lehet. Azaz az aktuális elérendő számot a $k-1, k-2, \dots k-10$ számok valamelyikére csökkentheti. Most használjuk az indukciós feltevést. Az első játékos lépése után, a második játékos (azaz Viki) kerül a kezdő helyzetébe. Vizsgáljuk meg, hogy melyik esetben ki nyerhet. Ha az elérendő cél $k-2, k-3, \dots, k-10$ számok valamelyikére módusol, akkor a kezdő játékos nyer, azaz jelen esetben Viki. A $k-1$-es esetben pedig a második játékos azaz Viki nyer. Niki a két lehetőség közül nyilván azt választja, amikor ő nyer, tehát egyet mond.

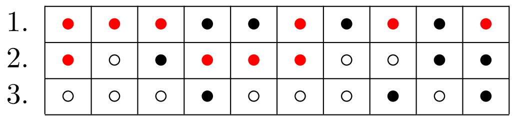
Hasonló okoskodással könnyen kitölthetjük a fenti táblázatot. Így könnyen adódik a tizenkettes ciklust, eszerint ha 100 az összeg, akkor az I. játékos, azaz Niki nyer.

Megjegyzés: A fenti bizonyítás bár meggyőzően hangzik, sajnos hibás. Ennek részletes leírása sajnos meghaladja ennek a jegyzetnek a kereteit, de érdemes önállóan végiggondolni.

7. *Egy táblázatban, amelynek* 3 *sora és* n *oszlopa van, véletlenszerűen elhelyeztünk* n *fehér,* n *piros és* n *fekete korongot. Soron belül a korongokat átrendezhetjük. Igazoljuk, hogy ekkor mindig elérhető, hogy minden oszlopban* 3 *különböző színű korong legyen.*

(III. Dürer Verseny, Döntő, 2010, 9-10. osztályosoknak)

Megoldás: Elég megmutatnunk, hogy egy tetszőleges $3 \times n$-es téglalapnál el tudjuk érni, hogy az első oszlopban csupa különböző színű korong legyen. Hiszen ha ezt tudjuk, akkor teljes indukcióval már könnyen beláthatjuk az állítást.



Írjuk minden szín mellé, hogy melyik sorokban szerepelnek:

fehér		**2.**	3.
fekete	**1.**	2.	3.
piros	1.	**2.**	

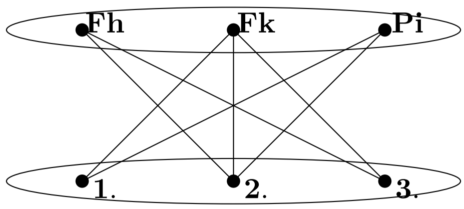
Minden színhez rendeljük hozzá, hogy melyik sorból szeretnék kiválasztani egy olyan színű korongot. Az a cél, hogy minden sort pontosan egyszer válasszunk ki, hiszen ekkor tudjuk úgy permutálni a sorokat, hogy az első oszlopban 3 különböző színű korong legyen. A fenti táblázat egy rossz kiválasztást mutat. Viszont könnyen belátható (esetszétválasztással), hogy minden lehetséges táblázatban hozzá tudjuk rendelni a sorokat a színekhez, hogy minden sort pontosan egyszer válasszunk ki. Ennek precíz belátását az Olvasóra bízzuk. A fenti példához mutatunk egy jó kiválasztást:

fehér		2.	**3.**
fekete	**1.**	2.	3.
piros	1.	**2.**	

Ez a megoldás nem mutatja meg a feladat lényegét, nem tudunk meg semmit arról, hogy min is múlik a bizonyítás (ezért nem is részleteztük). Most viszont egy általánosabb feladatot fogunk belátni.

Legyen a téglalap $k \times n$-es, és legyenek a korongjaink k színűek. Most is elég megmutatnunk, hogy tuduk úgy cserélgetni a korongokat, hogy az első oszlopban különböző színűek álljanak.

Változtassuk meg a táblázatos ábrázolást, és készítsünk egy páros gráfot. Így a páros gráf két *osztályában* lévő pontoknak feleljenek meg egyrészt a sorok, másrészt a színek. Pontosan akkor kössünk össze egy "sort" egy "színnel", ha az adott sorban van az adott színű korong (az alábbi ábrán a feladat elején bemutatott táblához tartozó gráfot ábrázoltuk).



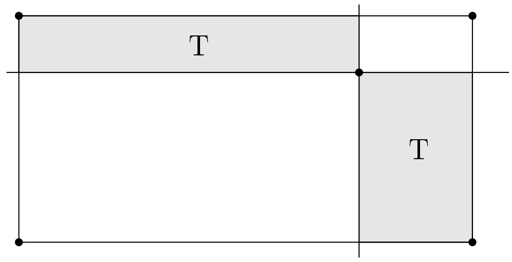
Ezen a nyelven mit jelent az, hogy tudjuk úgy csereberélni a korongokat, hogy legyen egy vegyes oszlop? Ez pontosan akkor történik meg, hogyha a gráfban van teljes párosítás (hiszen ekkor minden sorhoz tartozik egy egyedi szín). Teljes párosítások létezéséről szól az alábbi alapvető és szép tétel:

Tétel (Kőnig-Hall). Egy páros gráfban két osztálya azonos méretű (nevezzük alsó, illetve felső osztálynak). Ekkor a gráfban pontosan akkor van teljes párosítás, ha az alsó osztály tetszőleges X részhalmazát kiválasztva, a kiválasztott pontok szomszédainak száma (a felső osztályban) legalább annyi, mint X mérete.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható például itt: `http://hu.wikipedia.org/wiki/Hall-tétel`. A tételben megfogalmazott feltételét Hall-feltételnek hívjuk.

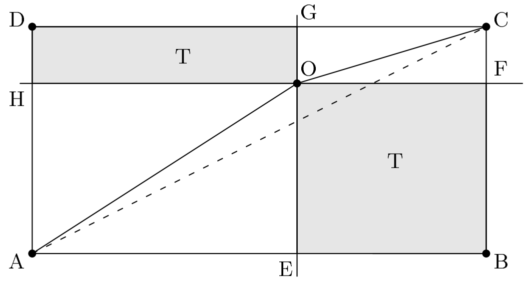
Elég tehát ellenőriznünk a Hall-feltétel teljesülését az általunk definiált gráfon. Tegyük fel, hogy nem teljesül a Hall-feltétel, azaz ki tudunk választani l sort úgy, hogy a velük szomszédos színek száma kisebb, mint l. Mit is jelent ez? A kiválasztott l darab sorban kevesebb mint l-féle színű korong szerepel, azaz ezekben a sorokban kevesebb, mint $l \times n$ korong van. De ez ellentmondás, hiszen l sorban pontosan ln korongnak kellene szerepelnie. Tehát a gráfunk nem sértheti meg a Hall-feltételt. Tehát a gráfban van teljes párosítás, tehát sorokon belüli cserékkel, elérhetjük azt, hogy az első oszlopban különböző színű korongok szerepeljenek. Így a feladat állítását nem csak háromra, hanem tetszőleges k-ra is beláttuk.

8. *Adott egy* 2010×1340 *méretű rácstéglalap. Egy rácspontot igazságosnak* nevezünk, hogyha a rajta átmenő 2 tengelypárhuzamos egyenes a nagy téglalap bal felső és jobb alsó sarkából egyenlő területű téglalapot vág le (egy ilyen pont látható az ábrán). Hány *igazságos* rácspont van a téglalap belsejében?



(IV. Dürer Verseny, Levelező, 2011, 9-10. osztályosoknak)

Megoldás: Használjuk az ábrán látható jelöléseket. Legyen O olyan pont, amire a két vizsgált téglalap területe azonos.



Húzzuk be az AO és OC szakaszokat, ezek felezik az $AEOH$, illetve a $OFCG$ téglalapok területét. Mivel a $HOGD$ és az $EBFO$ téglalapok területe megegyezik a feltevésünk miatt. Ezért az AOC töröttvonal felezi az $ABCD$ téglalap területét. Ezt viszont elmondhatjuk AC-ról, a téglalap átlójáról is. Ez csak úgy lehetséges, ha az O pont az AC átlón van. Viszont, ha O az átlón van, akkor a megfelelő téglalapok területe azonos, az előző gondolatmenet észrevételeit könnyen alkalmazhatjuk ennek az igazolására. Így a kérdés az, hogy hány rácspont van a táglalap átlóján?

Egy (x, y) rácspont, pontosan akkor van az átlón, ha teljesül a következő azonosság:

$$\frac{x}{y} = \frac{2010}{1340} = \frac{3}{2}, \quad \text{azaz} \quad 2x = 3y. \tag{1}$$

Az (1) azonosság feltétele teljesül, ha x hárommal osztható (hiszen ekkor $y = \frac{2x}{3}$ egész szám). Így az átlón lévő pontok száma $\frac{2010}{3} + 1 = 671$. Tehát a téglalap belsejében $671 - 2 = 669$ olyan rácspont van, ami megfelel a feltételeknek.

Megjegyzés: Bár ez a feladat önmagában is érdekes, érdemes megemlíteni, hogy az eredetileg ez egy lemma volt a számelmélet alaptételének egy geometriai bizonyításában. Erről bővebben Surányi János: Már a régi görögök is tudták ... (in: Freud Róbert: Nagy pillanatok a matematika történetében) tanulmányában olvashatnak az érdeklődők.

9. *Egy* 5×5*-ös négyzetrács minden mezőjében van egy-egy izzó. Minden egyes lámpa kapcsolásakor a 4 oldalszomszédja megváltoztatja az állapotát, de saját maga nem. El lehet-e érni, hogy minden lámpa égjen, ha kezdetben mindegyik le volt kapcsolva?*

(III. Dürer Verseny, Levelező, 2010, 7-8. osztályosoknak)

Megoldás: Engedjünk a feladat feltételeiből, próbáljunk csupán annyit elérni, hogy a főátló összes lámpája legyen felkapcsolva. Megmutatjuk, hogy hiába voltunk engedékenyek, már ezt a szerényebb célt sem tudjuk elérni.

			×	
		×		×
	×		×	
×		×		
	×			

Az ábrán megjelöltük azokat a mezők, amelyek megnyomása megváltoztatja legalább az egy, a főátlón lévő lámpa állapotát. Sőt, az is igaz, hogy minden kapcsolás az átlón pontosan két lámpa állapotát változtatja meg. Kezdetben az átlón páros sok (azaz 0) lámpa égett, és ez megmarad két lámpa megváltoztatása után. Hiszen ha e-nek és $e + x - y$-nek ugyanaz a paritása, ha $x + y = 2$ (e az égő lámpák, x a fekapcsolt, y a lekapcsolt lápák száma). Ezért nem lehet elérni, hogy a főátló összes lámpáját felkapcsoljuk.

Csatlakozó kérdések: Ennél a feladatnál sok természetes, érdekes és megoldható csatlakozó kérdést tehetünk fel. Ezek megválaszolását az Olvasóra bízzuk.

- Hány lámpát tudunk legfeljebb felkapcsolni?
- Milyen kezdőhelyzetek esetén érhetjük el, hogy mindegyik lámpa égjen?
- Mi a helyzet 6×6-os rács esetén?
- Mi a helyzet akkor, ha egy kapcsoláskor a középső is változik?