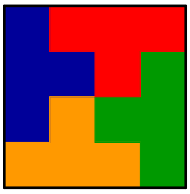
Megoldatlan feladatok

Az alábbi feladatokon a szervezők egy része gondolkozott (van amelyiken sokat, van amelyiken kevesebbet), többségüknek nem ismerjük a megoldását. Minden ötletet, megoldást szeretettel várunk, jó megoldásokért Túró Rudit adunk. email: szgabbor „kukac” gmail „pont” com



1. A tetrisből ismert T betűvel milyen oldalhosszúságú téglalapokat tudunk lefedni?
Kérdésfelvető: Radnai András
Pl.: a 4×4-es téglalap lefedhető. Tehát ilyen blokkokat egymás mellé illesztve minden $4k \times 4l$ oldalú téglalap lefedhető. Lefedhető-e más?

Időközben megtudtuk, hogy a kérdést már 1967-ben megoldotta, és publikálta D.W. Walkup. Bebizonyította, hogy pontosan a $4k \times 4l$ oldalhosszú téglalapok fedhetők le a tetrisből ismert T betűkkel. A bizonyítás vázlata lentebb olvasható.

2. „Dürer-sejtés”: Minden poliédert fel lehet vágni az élei mentén úgy, hogy lapjai (átfedés nélkül) kiteríthetőek legyenek a síkban, egy összefüggő sokszöget képezve.

A sejtést Albrecht Dürer fogalmazta meg az 1500-as években.

3. Mekkora a minimális területű konvex rács n-szög területének a nagyságrendje, azaz n függvényében mekkora?
Kérdésfelvető: Gyenes Zoli

4. A egy egész számokból álló halmaz ($|A| = n$ a halmaz elemeinek száma). $|A + A|$ és $|A \cdot A|$ számosságok közül legalább az egyik nagy (azaz van olyan c kontans, hogy az egyikük nagyobb mint $c \cdot n^2$).

$$A + A = \{a_1 + a_2 | a_1, a_2 \in A\}$$
$$A \cdot A = \{a_1 \cdot a_2 | a_1, a_2 \in A\}$$

Erdős Pál és Szemerédi Endre sejtése

Erdős-Szemerédi tétel (1983): Léteznek c és ϵ pozitív konstansok úgy, hogy minden A valós számokból álló véges halmaz esetén

$$max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq c|A|^{1+\epsilon}$$

A sejtés pontosan: 1 tetszőlegesen megközelíthető alulról egy fentieket teljesítő ϵ konstanssal. Legjobb ismert eredmény: $\frac{1}{3}$ tetszőlegesen megközelíthető ϵ konstanssal. (Solymosi József, 2009)

5. Egy csoport két elem által generált, és minden elem rendje osztja 5-öt. Igaz-e, hogy a csoport mindenképpen véges?
Kérdésfelvető: Kutas Peti

6. Egy hatpontú gráf éleit két játékos színezi felváltva (egyikük kékkel, a másikuk pirossal). Az veszít, aki először hoz létre egy egyszínű háromszöget. Kinek van nyerő stratégiája?
Kérdésfelvető: Jenei Dani

7. t darab, egyforma csokoládét szeretnénk elosztani igazságosan n gyerek között. Határozzuk meg az n azon értékeit, amelyekre meg lehet valósítani az elosztást úgy, hogy minden táblát

legfeljebb egyszer törhetünk ketté!
Kérdésfelvető: Dücső Marci

8. Van-e olyan négyzetszám a 10-hatványok kivételével, ami tízes számrendszerben csak 1 és 0 számjegyekből áll?
Kérdésfelvető: Szűcs Gábor

Programmal ellenőriztük, hogy 10^{76}-ig nincs ilyen szám. Önmagában is érdekes feladat, hogy egy gyors ellenőrző algoritmust találjunk.

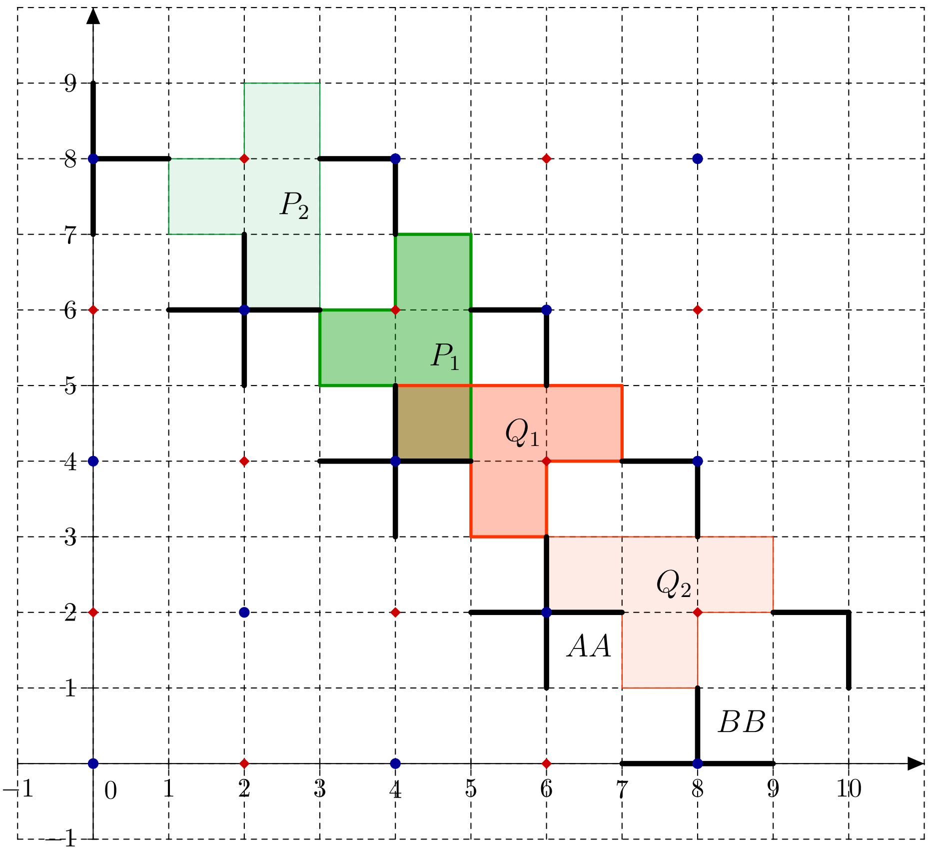
1. megoldásvázlat Csak a $4k \times 4l$-es téglalapok fedhetőek le.

Egyszerű megfigyelés, hogy ha R egy $a \times b$ oldalú téglalap lefedhető, akkor az egész pozitív síknegyed is. Egy T-tetrominonak 6 külső és két belső sarka van. *Elvágó szakasznak* nevezzük egy egységnégyzet oldalát, ha az határszakasza egy T-tetrominonak a pozitív síknegyed összes lehetséges lefedésében. Egy pontot *saroknélkülinek* nevezünk, ha a pozitív síknegyed egy lefedésében sem esik rá egy T-tetromino külső sarka. Egy objektum *eltoltjának* nevezzük az olyan eltoltját, ahol $\underline{v} = (-2k, 2k)$.

Lemma: *Minden kék ponthoz illeszkedő szakaszok elvágó szakaszok, és minden piros pont saroknélküli.*

Ez $x+y$ szerinti indukcióval bizonyítható, ahol $P = (x, y)$. P_1 vagy Q_1 T-tetrominot nem tartalmazhatja egy fedés sem, mert akkor ezek eltoltjait is tartalmaznia kellene.

A lemma felhasználásával már adódik a tétel bizonyítása. Ha egy R téglalap lefedhető, a sarka nem lehet saroknélküli, ezért a, b 4-gyel osztva nem adhat 2 maradékot. Ha a vagy b páratlan, egy AA vagy BB típusú mező nem fedhető le.



Hivatkozások

[1] D. W. Walkup: Covering a Rectangle with T-Tetrominoes
The American Mathematical Monthly Vol. 72, No. 9 (Nov., 1965), pp. 986-988