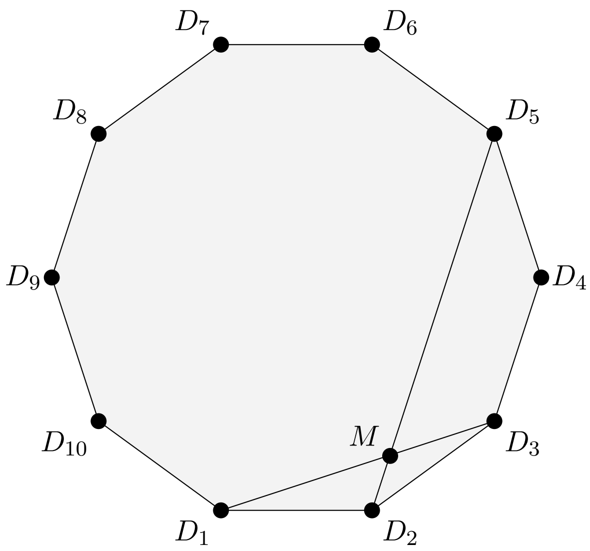
Matek megoldókulcs

9 - 10. osztályosok

C kategória

1. Dürer kedvenc szabályos tízszögének csúcsai körüljárási sorrendben: $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{10}$. Mekkora szöget zár be egymással a D_1D_3 és a D_2D_5 átló?

Megoldás: Íme Dürer kedvenc szabályos 10-szöge. M jelöli a a D_1D_3 és a D_2D_5 átlók metszéspontját.



Ismeretes, hogy egy szabályos 10-szög minden szöge 144°-os. (Például, mert a külső szögek összege minden szabályos sokszögben 360°, így a külső szögek egyenként 36°-osak).

A $D_1D_2D_3$ háromszögben $D_1D_2 = D_2D_3$, tehát $D_2D_1D_3\sphericalangle = D_2D_3D_1\sphericalangle = \frac{180^\circ - 144^\circ}{2} = 18^\circ$.

Most tekintsük a $D_2D_3D_4D_5$ négyszöget: ebben $D_5D_2D_3\sphericalangle = D_2D_5D_4\sphericalangle$ (hiszen a $D_5D_2D_3$ háromszög egybevágó a $D_2D_5D_4$ háromszöggel). Mivel egy négyszög szögeinek összege 360° és a vizsgált négyszög másik két szöge egyaránt 144°-os, így

$$D_5D_2D_3\sphericalangle = D_2D_5D_4\sphericalangle = 36^\circ;$$

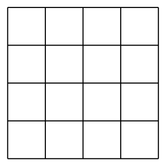
következésképpen $D_1D_2D_5\sphericalangle = 144^\circ - D_5D_2D_3\sphericalangle = 108^\circ$.

Végül, a D_1D_2M háromszögben:

$$\begin{aligned} D_1MD_2\sphericalangle &= 180^\circ - D_2D_1M\sphericalangle - MD_2D_1\sphericalangle = \\ &= 180^\circ - D_2D_1D_3\sphericalangle - D_5D_2D_1\sphericalangle = 180^\circ - 18^\circ - 108^\circ = 54^\circ, \end{aligned}$$

amely éppen a két viszgált átló által bezárt szög.

2. Az ábrán látható táblázat minden kis négyzete 1 cm oldalhosszúságú. A kis négyzetek határvonalait akarjuk lefedni. Meg lehet-e ezt tenni



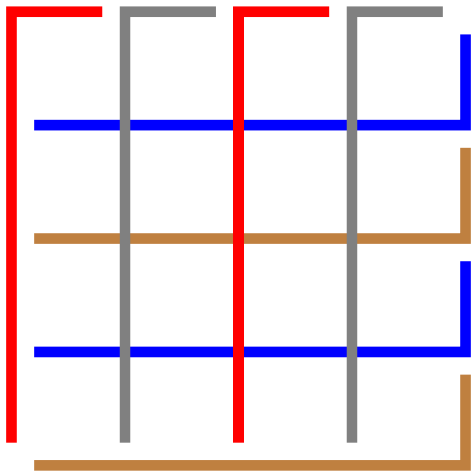
a) 5 db 8 cm hosszú, **b)** 8 db 5 cm hosszú cérnával?

Megoldás: a) Nem lehetséges.

Mivel a négyzetrács oldalhosszainak összege 40 cm, ezért a lefedés csak úgy lehetséges, ha nincs olyan szakasz, melyet két cérna is fed. Megfigyelhetjük ez alapján, hogy minden olyan pontban, ahonnan 3 szakasz indul ki, ott legalább az egyik cérnának a végpontja kell, hogy legyen.

Az ábrán 12 olyan pont van, ahonnan 3 szakasz indul ki, viszont nekünk csak 5 cérnánk van, amivel legfeljebb 10 ilyen pontot tudunk lefedni. Azaz nem fedhető le az ábra 5 db 8 cm-es cérnával.

b) Le lehet fedni. Egy lehetőség a lefedésre:



3. Oldjátok meg az

$$a^2 + \ell^2 + b^2 + r^2 + e^2 + c^2 + h^2 = t^2$$

egyenletet, ha a, ℓ, b, r, e, c, h és t (nem feltétlenül különböző) prímszámok.

Megoldás:

Egy páratlan szám négyzetének a nyolcas maradéka 1. Tehát a jobb oldal 8-as maradéka 1, mert t nem lehet 2 (a bal oldali összeg biztos, hogy több, mint 4). Ha az a, ℓ, b, r, e, c, h számok között van k darab kettes, és így a maradék $7 - k$ darab szám páratlan prímszám, akkor a bal oldal 8-as maradéka megegyezik $4k + (7 - k)$ 8-as maradékával. Ez csak úgy lehet 1, ha k 8-as maradéka 6, vagyis 6 darab kettes van.

Feltehetjük, hogy $h \neq 2$. Ekkor azt kapjuk, hogy $24 + h^2 = t^2$, vagyis $24 = (t + h)(t - h)$. Mivel t és h páratlanok, 24-et két páros szám szorzatára kell felbontani, amit csak $6 \cdot 4$ és $12 \cdot 2$ módon lehet. Az első esetben $t = 5$, $h = 1$, a másodikban $t = 7$, $h = 5$. Így (a számok sorrendjétől eltekintve) egyetlen megoldás van:

$$2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2 = 7^2$$

4. Egy számot *kellemes*nek nevezünk, ha összeadva azzal a számmal, amit úgy kapunk, hogy számjegyeit fordított sorrendben írjuk, az eredmény csupa páratlan számjegyből áll. Például a 647 kellemes háromjegyű szám, mert $647 + 746 = 1393$.
Van-e kellemes 2016-jegyű szám? És 2015-jegyű? És 2017-jegyű?

Megoldás: Egy kellemes 2016-jegyű szám a következő:

$$\underbrace{11\ldots11}_{1008\text{ db}}\underbrace{22\ldots22}_{1008\text{ db}}$$

Ez a szám valóban kellemes, mert a számjegyeit fordított sorrendben felírva kapott számmal összeadva az eredmény

$$\underbrace{33\ldots33}_{2016\text{ db}}$$

melynek valóban minden számjegye páratlan.

2015-jegyű kellemes szám is van. A következő egy jó példa:

$$\underbrace{202020\ldots202}_{1007\text{ számjegy}}0\underbrace{909090\ldots909}_{1007\text{ számjegy}}$$

Ezt a számot a fordítottjával összeadva az eredmény

$$\underbrace{11\ldots11}_{2016\text{ db}}$$

Tehát ez a szám is valóban kellemes.

Megmutatjuk, hogy 2017-jegyű kellemes szám viszont nincs. Tegyük fel mégis, hogy az $\overline{a_1a_2\ldots a_{2017}}$ szám kellemes (ahol $a_1, a_2, \ldots$ a számjegyek).

Először nézzük meg, hogy hogyan viselkednek az $\overline{a_1a_2\ldots a_{2017}} + \overline{a_{2017}a_{2016}\ldots a_1}$ összegben a tízesátmenetek!

Azt állítjuk, hogy ha egy $0 < i < 1008$ esetén az $1009 + i$-edik helyiértéken van átvitel, akkor az $1009 - i$-edik helyiértéken is. Az összeadás közben az $1009 - i$-edik és az $1009 + i$-edik helyiértéknél is az $a_{1009-i} + a_{1009+i}$ összeget fogjuk kiszámolni, plusz ehhez mindkét helyen hozzájön az előző helyiérték átvitele. Tehát a két helyiértéken szereplő összeg legfeljebb 1-gyel térhet el (amiatt, hogy az előző helyiértékről jön-e átvitel). Vagyis ha az $1009 + i$-edik helyiértéken nincs átvitel, az $1009 - i$-ediken pedig van, az csak úgy lehetne hogy $a_{1009-i} + a_{1009+i} = 9$, és az $1009 + i + 1$-edik helyiértékről nem jön átvitel, az $1009 - i + 1$-edikről pedig igen. De ilyenkor az összegben az $1009 - i$-edik helyiértéken 0 állna, ez pedig nem lehet, mert feltettük hogy $a_1a_2\ldots a_{2017}$ kellemes szám. Tehát beláttuk, hogy ha az $1009+i$-edik helyiértéken van átvitel, akkor az $1009 - i$-edik helyiértéken is.

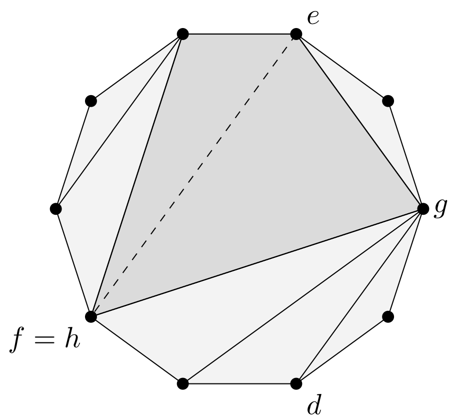
Mikor $\overline{a_1a_2\ldots a_{2017}}$-et összeadjuk $\overline{a_{2017}a_{2016}\ldots a_1}$-gyel, akkor a_{1009} önmagával adódik össze. Tehát az összeg 1009-edik jegye csak akkor lehet páratlan, ha az 1010-edik helyiértékről érkezik egy átvitel. Viszont akkor az előbbiek miatt az 1008-adik helyiértékről az 1007-edikre is van átvitel. Ez viszont azt jelenti, hogy $a_{1007} + a_{1011}$-nek párosnak kell lennie, hogy az átvitellel együtt páratlan legyen az összeg 1007-edik számjegye. Viszont emiatt az 1012-edik helyiértéken is kell átvitelnek lennie, különben az 1011-edik helyiértéken páros szám $(a_{1007}+a_{1011})$ szerepelne. Ezt az érvelést folytatva azt kapjuk, hogy minden páratlan i-re az $1009 + i$-edik és az $1009 - i$-edik helyiértéken van átvitel, minden páros i-re pedig $a_{1009-i} + a_{1009+i}$ páros. De így speciálisan $i = 1008$-ra azt kapjuk, hogy $a_1 + a_{2017}$ is páros. Viszont így az összeg utolsó jegye páros lesz, azaz $a_1a_2\ldots a_{2017}$ mégsem lehet kellemes szám.

5. Egy szabályos tízszög csúcsaiba az egész számokat írhatjátok 1-től 10-ig, mindegyiket pontosan egyszer. Egy számpárt *domináló*nak nevezünk, ha nincsenek egymás mellett, és az őket összekötő egyenes valamelyik oldalán csak a számpár mindkét tagjánál kisebb számok állnak.
Legalább hány domináló számpár van biztosan egy ilyen tízszögben?

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy a domináló párok száma nem függ attól, milyen elrendezésben írtuk fel a számokat a tízszög csúcsaira. Mivel egy domináló pár két tagja nem lehet szomszédos csúcsokra írva, minden domináló pár a tízszög egy átlójának felel meg. Húzzuk be ezeket az átlókat, azt fogjuk először belátni, hogy a tízszög egy háromszögelését kapjuk ilyen módon.

Legyen (a, b) és (c, d) két domináló pár, és tegyük fel, hogy a négy szám közül a a legkisebb. Ekkor c és d az ab átló azonos oldalán kell, hogy elhelyezkedjen, különben az (a, b) pár nem lehetne domináló. Tehát nem metszik egymást az átlók, így néhány sokszögre bontják a tízszöget.

Tegyük fel, hogy ezen sokszögek közül van olyan, amely nem egy háromszög, jelöljünk egy ilyet K-val. Legyen a K csúcsaira írt három legnagyobb szám a, b és c, hogy $a > b > c$. Ha vagy b vagy c nem szomszédos a-val a K sokszögben, akkor ez az átló K-ban domináló párhoz fog tartozni. Valóban, ha például a és c nem szomszédosak, akkor azon az oldalán az ac átlónak, ahol nincs ott b, csak a-nál és c-nél kisebb számok szerepelnek K csúcsain. Ha a-nak b és c a két szomszédja, akkor a (b, c) pár lesz domináló a K sokszögben, hiszen nem szomszédosak (K nem háromszög, valamint b és c másodszomszédok K-ban), továbbá a bc átló a-t nem tartalmazó oldalán minden K csúcsain lévő szám kisebb b-nél és c-nél is.



Azt kaptuk tehát, hogy van olyan átló, jelöljük ezt ef-fel, amely a K sokszögben domináló. Most megmutatjuk, hogy az eredeti tízszögben is az. Tudjuk, hogy az ef átló egyik oldalán csak e-nél és f-nél kisebb számok vannak K csúcsain, tegyük fel azonban, hogy az eredeti tízszög csúcsán szerepel egy d szám, amely ugyanezen az oldalán van az ef átlónak, mégsem dominálja ef d-t, azaz d nagyobb e-nél vagy f-nél. Mivel d nincs a K sokszögön, létezik K-nak egy oldala, a tízszög egy átlója, amely domináló és elválasztja d-t K belsejétől. Legyen ez a gh átló. Mivel gh domináló a tízszögben, valamelyik oldalán csak g-nél és h-nál kisebb számok szerepelnek a tízszög csúcsain. Ez az oldal nem lehet a K-t tartalmazó oldal, hiszen az ef átlónak azon az oldalán, ahol g és h vannak, e és f nagyobb minden K-beli csúcsra írt számnál. A g és h csúcsok közül legalább egy nincs az ef átlón, így az kisebb e-nél és f-nél. Tehát mind g, mind h nagyobb d-nél, és egyikük kisebb e-nél és f-nél. Következésképpen kapjuk, hogy e és f nagyobb, mint d, amely egy tetszőleges pont volt az egyik oldalán, tehát domináló a tízszögben.

Ezzel ellentmondást kaptunk, hiszen korábban azt tettük fel, hogy K-ban nincs olyan átló, mely az egész tízszögben domináló volna, de mégis találtunk ilyet. Tehát megmutattuk, hogy a domináló párok valóban egy háromszögelését adják a tízszögnek. A sokszögek belső szögeinek összegére vonatkozó képlet alapján könnyen kiszámolható, hogy egy tízszög tetszőleges háromszögelésében 8 háromszög szerepel. Ezeknek összesen 24 oldala van, melyek közül a tízszögön belül behúzott átlók két háromszöghöz is tartoznak, míg a tízszög oldalai csak egyhez. Emiatt $\frac{24-10}{2} = 7$ átló kerül behúzásra minden háromszögelésnél, ennyi lesz mindig a domináló párok száma.