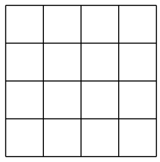
Matek megoldókulcs
9 - 10. osztályosok



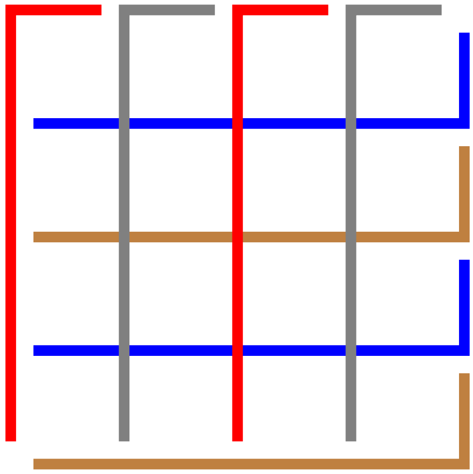
1. Az ábrán látható táblázat minden kis négyzete 1 cm oldalhosszúságú. A kis négyzetek határvonalait akarjuk lefedni. Meg lehet-e ezt tenni

a) 5 db 8 cm hosszú, **b)** 8 db 5 cm hosszú cérnával?

Megoldás:

a) Nem lehetséges.
Mivel a négyzetrács oldalhosszainak összege 40 cm, ezért a lefedés csak úgy lehetséges, ha nincs olyan szakasz, melyet két cérna is fed.
Megfigyelhetjük ez alapján, hogy minden olyan pontban, ahonnan 3 szakasz indul ki, ott legalább az egyik cérnának a végpontja kell, hogy legyen.
Az ábrán 12 olyan pont van, ahonnan 3 szakasz indul ki, viszont nekünk csak 5 cérnánk van, amivel legfeljebb 10 ilyen pontot tudunk lefedni. Azaz nem fedhető le az ábra 5 db 8 cm-es cérnával.

b) Le lehet fedni. Egy lehetőség a lefedésre:



2. Oldjátok meg az

$$a^2 + \ell^2 + b^2 + r^2 + e^2 + c^2 + h^2 = t^2$$

egyenletet, ha a, ℓ, b, r, e, c, h és t (nem feltétlenül különböző) prímszámok.

Megoldás:

Egy páratlan szám négyzetének a nyolcas maradéka 1. Tehát a jobb oldal 8-as maradéka 1, mert t nem lehet 2 (a bal oldali összeg biztos, hogy több, mint 4). Ha az a, ℓ, b, r, e, c, h számok között van k darab kettes, és így a maradék $7 - k$ darab szám páratlan prímszám, akkor a bal oldal 8-as maradéka megegyezik $4k + (7 - k)$ 8-as maradékával. Ez csak úgy lehet 1, ha k 8-as maradéka 6, vagyis 6 darab kettes van.

Feltehetjük, hogy $h \neq 2$. Ekkor azt kapjuk, hogy $24 + h^2 = t^2$, vagyis $24 = (t + h)(t - h)$. Mivel t és h páratlanok, 24-et két páros szám szorzatára kell felbontani, amit csak $6 \cdot 4$ és $12 \cdot 2$ módon lehet. Az első esetben $t = 5$, $h = 1$, a másodikban $t = 7$, $h = 5$. Így (a számok sorrendjétől eltekintve) egyetlen megoldás van: $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2 = 7^2$.

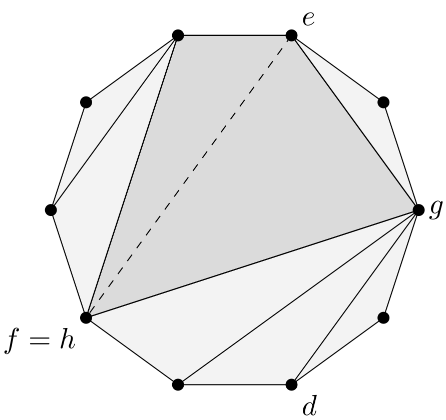
3. Egy szabályos tízszög csúcsaiba az egész számokat írhatjátok 1-től 10-ig, mindegyiket pontosan egyszer. Egy számpárt *domináló*nak nevezünk, ha nincsenek egymás mellett, és az őket összekötő egyenes valamelyik oldalán csak a számpár mindkét tagjánál kisebb számok állnak.
Legalább hány domináló számpár van biztosan egy ilyen tízszögben?

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy a domináló párok száma nem függ attól, milyen elrendezésben írtuk fel a számokat a tízszög csúcsaira. Mivel egy domináló pár két tagja nem lehet szomszédos csúcsokra írva, minden domináló pár a tízszög egy átlójának felel meg. Húzzuk be ezeket az átlókat, azt fogjuk először belátni, hogy a tízszög egy háromszögelését kapjuk ilyen módon.

Legyen (a, b) és (c, d) két domináló pár, és tegyük fel, hogy a négy szám közül a a legkisebb. Ekkor c és d az ab átló azonos oldalán kell, hogy elhelyezkedjen, különben az (a, b) pár nem lehetne domináló. Tehát nem metszik egymást az átlók, így néhány sokszögre bontják a tízszöget.

Tegyük fel, hogy ezen sokszögek közül van olyan, amely nem egy háromszög, jelöljünk egy ilyet K-val. Legyen a K csúcsaira írt három legnagyobb szám a, b és c, hogy $a > b > c$. Ha vagy b vagy c nem szomszédos a-val a K sokszögben, akkor ez az átló K-ban domináló párhoz fog tartozni. Valóban, ha például a és c nem szomszédosak, akkor azon az oldalán az ac átlónak, ahol nincs ott b, csak a-nál és c-nél kisebb számok szerepelnek K csúcsain. Ha a-nak b és c a két szomszédja, akkor a (b, c) pár lesz domináló a K sokszögben, hiszen nem szomszédosak (K nem háromszög, valamint b és c másodszomszédok K-ban), továbbá a bc átló a-t nem tartalmazó oldalán minden K csúcsain lévő szám kisebb b-nél és c-nél is.

Azt kaptuk tehát, hogy van olyan átló, jelöljük ezt ef-fel, amely a K sokszögben domináló. Most megmutatjuk, hogy az eredeti tízszögben is az. Tudjuk, hogy az ef átló egyik oldalán csak e-nél és f-nél kisebb számok vannak K csúcsain, tegyük fel azonban, hogy az eredeti tízszög csúcsán szerepel egy d szám, amely ugyanezen az oldalán van az ef átlónak, mégsem dominálja ef d-t, azaz d nagyobb e-nél vagy f-nél. Mivel d nincs a K sokszögön, létezik K-nak egy oldala, a tízszög egy átlója, amely domináló és elválasztja d-t K belsejétől. Legyen ez a gh átló. Mivel gh domináló a tízszögben, valamelyik oldalán csak g-nél és h-nál kisebb számok szerepelnek a tízszög csúcsain. Ez az oldal nem lehet a K-t tartalmazó oldal, hiszen az ef átlónak azon az oldalán, ahol g és h vannak, e és f nagyobb minden K-beli csúcsra írt számnál. A g és h csúcsok közül legalább egy nincs az ef átlón, így az kisebb e-nél és f-nél. Tehát mind g, mind h nagyobb d-nél, és egyikük kisebb e-nél és f-nél. Következésképpen kapjuk, hogy e és f nagyobb, mint d, amely egy tetszőleges pont volt az egyik oldalán, tehát domináló a tízszögben.



Ezzel ellentmondást kaptunk, hiszen korábban azt tettük fel, hogy K-ban nincs olyan átló, mely az egész tízszögben domináló volna, de mégis találtunk ilyet. Tehát megmutattuk, hogy a domináló párok valóban egy háromszögelését adják a tízszögnek. A sokszögek belső szögeinek összegére vonatkozó képlet alapján könnyen kiszámolható, hogy egy tízszög tetszőleges háromszögelésében 8 háromszög szerepel. Ezeknek összesen 24 oldala van, melyek közül a tízszögön belül behúzott átlók két háromszöghöz is tartoznak, míg a tízszög oldalai csak egyhez. Emiatt $\frac{24-10}{2} = 7$ átló kerül behúzásra minden háromszögelésnél, ennyi lesz mindig a domináló párok száma.

4. Egy (m, n) egész számokból álló párt *Dürer-pár*nak nevezünk, ha $n > m > 1$, m-nek és n-nek pontosan ugyanazok a prímosztói, és ugyanez igaz $m + 1$-re és $n + 1$-re is. Például a $(2, 8)$ egy Dürer-pár. Adjatok példát végtelen sok Dürer-párra!

Megoldás: Legyen $m = 2^k-2$, és $n = 2^k(2^k-2)$, ahol $k > 1$ egész szám. Ekkor m és n prímosztói megegyeznek, mert $2^k - 2$ páros. Másrészt $n + 1 = 2^{2k} - 2 \cdot 2^k + 1 = (2^k - 1)^2 = (m + 1)^2$, tehát $m + 1$ és $n + 1$ prímosztói is megegyeznek.

5. Van-e olyan hétszög és a belsejében egy P pont, hogy a hétszög bármely csúcsának P-től való távolsága egyenlő a csúccsal szemben lévő oldal hosszával?
Egy oldalt és egy csúcsot szemben lévőnek nevezünk, ha az oldal a csúcstól számított negyedik oldal (tetszőleges irányban).

Megoldás: Van ilyen hétszög. Egy lehetséges módszer egy konstrukció megtalálására a következő:

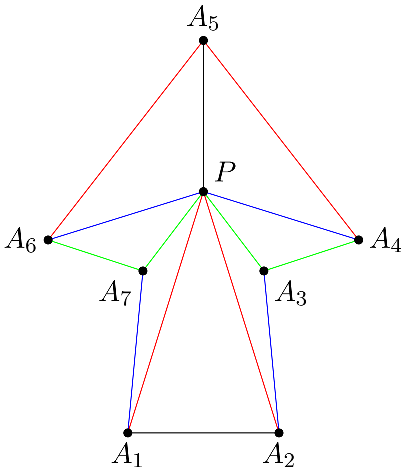
Vizsgáljuk csak a tengelyesen szimmetrikus hétszögeket. Legyen P is rajta a szimmetriatengelyen. Ezen feltételezések nagyban leegyszerűsítik egy megfelelő hétszög megtalálását (1. ábra).

Vegyünk ugyanis egy tetszőleges A_1A_2 szakaszt, és annak felezőmerőlegesén valahol egy P pontot. Vegyük ezután a felezőmerőleges azon A_5 pontját, melynek P-től való távolsága A_1A_2 (és távolabb van az A_1A_2 szakasztól, mint P). Majd vegyünk egy olyan A_4 pontot, amely $PA_1 = PA_2$ távolságra van A_5-től, tükörképe a PA_5 egyenesre legyen A_6. Végül, olyan A_3 pontra van szükségünk, amely $PA_6 = PA_4$ távolságra van A_2-től, továbbá egyenlő távolságra van P-től és A_4-től. Ha szerencsénk van, akkor PA_4 felezőmerőlegesén olyan A_3 pontot találunk, amely A_7 tükörképével együtt az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ hétszög nem lesz hurkolt, és amelynek P belső pontja, ekkor készen vagyunk.

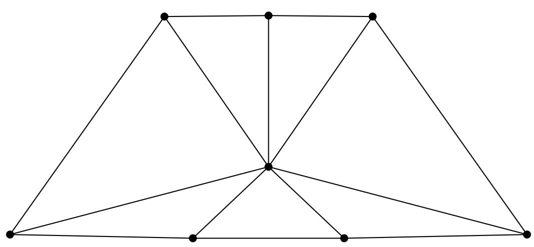
Egy precíz konstrukció pedig például a következő:

$$A_1 = (-1, 0), \quad A_2 = (1, 0), \quad A_3 = (1/2, \sqrt{3}/2), \quad A_4 = (1, 2),$$
$$A_5 = (0, 4), \quad A_6 = (-1, 2), \quad A_7 = (-1/2, \sqrt{3}/2), \quad P = (0, 2).$$

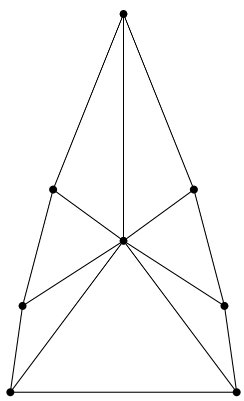
Megjegyzés: Ugyanilyen tulajdonságú konvex hétszög is létezik. Ezen módszerrel találhatók tengelyesen szimmetrikus példák (2. és 3. ábra).



1. ábra



2. ábra



3. ábra