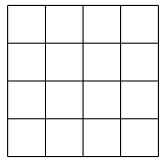
1. Az ábrán látható táblázat minden kis négyzete 1 cm oldalhosszúságú. A kis négyzetek határvonalait akarjuk lefedni. Meg lehet-e ezt tenni



a) 5 db 8 cm hosszú, **b)** 8 db 5 cm hosszú cérnával?

Megoldás:

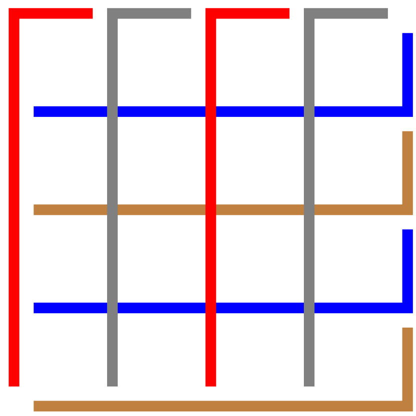
a) Nem lehetséges.

Mivel a négyzetrács oldalhosszainak összege 40 cm, ezért a lefedés csak úgy lehetséges, ha nincs olyan szakasz, melyet két cérna is fed.

Megfigyelhetjük ez alapján, hogy minden olyan pontban, ahonnan 3 szakasz indul ki, ott legalább az egyik cérnának a végpontja kell, hogy legyen.

Az ábrán 12 olyan pont van, ahonnan 3 szakasz indul ki, viszont nekünk csak 5 cérnánk van, amivel legfeljebb 10 ilyen pontot tudunk lefedni. Azaz nem fedhető le az ábra 5 db 8 cm-es cérnával.

b) Le lehet fedni. Egy lehetőség a lefedésre:



2. **a)** Milyen pozitív egész n-ekre igaz, hogy $6^n - 1$ osztható 7-tel?

b) Bizonyítsátok be, hogy $7^n - 1$ semmilyen pozitív egész n-re nem osztható $6^n - 1$-gyel.

Megoldás: **a)** Nézzük a 6 hatványainak a 7-es maradékát: $6 \equiv 6$, $6^2 \equiv 1$, $6^3 \equiv 6$, innen ismétlődik, vagyis felváltva 6 (páratlan kitevő esetén) és 1 (páros kitevő esetén). Így tehát $6^n - 1$ maradéka felváltva 5 és 0, vagyis pontosan akkor osztható $6^n - 1$ 7-tel, ha n páros.

b) Tegyük fel, hogy valamilyen pozitív egész n-re $6^n - 1 \mid 7^n - 1$. Az ismert szorzattá alakítás alapján $6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \cdots + 6 + 1)$, vagyis $5 \mid 6^n - 1$, így szükségképpen $5 | 7^n - 1$.

Most nézzük a 7 hatványainak az 5-ös maradékát: $7 \equiv 2$, $7^2 \equiv 4$, $7^3 \equiv 3$, $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 2$, és innen ismétlődik. Vagyis azt kaptuk, hogy ha $5 \mid 7^n - 1$, akkor n osztható 4-gyel.

Tehát ha valamilyen n-re $6^n - 1 \mid 7^n - 1$, akkor $4 \mid n$, speciálisan n páros, és az a) rész alapján így $7 \mid 6^n - 1$, ám emiatt $7 \mid 7^n - 1$, ami nem teljesülhet, ha n pozitív egész. Ellentmondást kaptunk, így feltevésünk hamis volt, így ezzel beláttuk a feladat állítását.

3. A játszótéren 25 gyerek áll úgy, hogy a köztük fellépő távolságok mind különbözőek. Kezdetben mindegyiküknél egy labda van. Ha a tanár megfújja a sípját, minden gyerek eldobja az összes nála lévő labdát a hozzá legközelebb álló gyereknek.

a) Lehetséges-e, hogy néhány sípszó után az összes labda egy gyereknél van?

b) Igazoljátok, hogy egyik gyerekhez se kerülhetett ötnél több labda az első sípszó után.

Ezután a 25 gyerek egy másik játékba kezd. Továbbra is úgy állnak, hogy a köztük fellépő távolságok mind különbözőek, és kezdetben mindenkinél egy labda van. Az első sípszó után minden gyerek eldobja a labdát a hozzá legközelebb álló gyereknek. Ám a második sípszóra mindenki úgy dobja el a nála lévő labdákat, hogy ha valakihez k labda került az első sípszó után, akkor a hozzá legközelebb álló k gyereknek dob egyet-egyet.

c) Lehetséges-e, hogy ezután mindenkinél pontosan egy labda lesz?

Megoldás: a) Nem lehet. A 25 gyerek között fellép $\binom{25}{2}$ távolság, ezek mind különbözőek, így van köztük legkisebb. Legyen ez az A és B gyerek közti távolság. A mindenképpen B-nek dobja a labdáit, hiszen A-hoz senki nem lehet közelebb, mint B, mert a legkisebbnek az AB távolságot vettük. Hasonlóan, B is csak A-nak dobhatja a labdáit.

Nézzük azt a két labdát, melyek kezdetben A-nál, illetve B-nél voltak. Ezeket minden sípszó után átdobják a másiknak, így a kezdetben A-nál lévő labda páratlan sípszó után B-nél, páros sípszó után A-nál van, és hasonlóan, a kezdetben B-nél lévő labda páratlan sípszó után A-nál, páros sípszó után B-nél van. Vagyis A-hoz is és B-hez is mindig kerül labda, így nem lehet, hogy egyetlen gyerekhez kerül az összes.

2. megoldás az a) részre Vegyük azt az irányított gráfot, ahol a gyerekek a csúcsok, és egy irányított élt akkor húzunk be A-ból B-be, ha az A-hoz legközelebbi gyerek B, azaz A mindig B-nek dobja a labdáit. Ebben a gráfban minden csúcsnak 1 a kifoka, vagyis ha tetszőleges csúcsból elindulunk egy irányított séta mentén, akkor minden csúcsból egyértelműen tudunk továbblépni. Mivel csak véges sok csúcs van, így előbb-utóbb olyan csúcsra lépünk, ahol már jártunk, és ezzel találunk egy irányított kört a gráfban, mely legalább 2 élből áll, hiszen hurokél nem lehetett a gráfban. Legyenek ennek a körnek a csúcsai sorrendben $A_1, A_2, \dots A_k$.

Kezdetben legyen A_i-nél az L_i labda. Látható, hogy ezen labdák akárhány sípszó után is ebben a körben lesznek, azaz valamelyik A_j gyereknél. s-re vonatkozó indukcióval könnyen belátható, hogy az L_i labda s sípszó után az A_j gyereknél van pontosan akkor, ha $j \equiv i + s \pmod{k}$.

Ebből könnyen kiszámolható, hogy az A_j gyereknél s sípszó után van labda, mégpedig az az L_i, melyre $i \equiv j - s \pmod{k}$. Vagyis a körben álló $k \geq 2$ gyerek mindegyikénél mindig van labda, így nem kerülhet egyetlen gyerekhez az összes labda.

Megjegyzés: A 2. megoldás nem használta ki, hogy mindenki a hozzá legközelebbinek dobja a labdáit, csak azt, hogy minden sípszó után ugyanannak dobja. Ezzel egy általánosabb feladatot oldottunk meg, ugyanakkor bonyolultabban, hiszen az 1. megoldásban a kör megtalálása egyből adódik a legkisebb távolság két végpontján, és annak is egyszerűbb a bizonyítása, hogy mindegyiküknél mindig van labda.

b) Tegyük fel, hogy az A gyereknek dobja a labdáját $B_1, B_2, \dots B_k$, mégpedig úgy, hogy ha A körbefordul, akkor ilyen sorrendben látja őket. Meg fogjuk mutatni, hogy $B_iAB_j\sphericalangle > 60°$ minden $i \neq j$-re, így speciálisan a szomszédosok közti szög sem lehet ennél kisebb. Márpedig a B_1AB_2, B_2AB_3, …, B_kAB_1 szögtartományok épp lefedik a síkot, vagyis $360° = B_1AB_2\sphericalangle + B_2AB_3\sphericalangle + \dots + B_kAB_1\sphericalangle > k \cdot 60°$, amiből $6 > k$, vagyis $k \leq 5$, és épp ezt kell belátni.

Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy $B_iAB_j\sphericalangle > 60°$. B_i a labdáját A-nak dobja, nem B_j-nek (vagy bárki másnak), így $|B_iA| < |B_iB_j|$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $|B_jA| < |B_jB_i|$. Vagyis az AB_iB_j háromszögben a B_iB_j a leghosszabb oldal, és így a vele szemközti szög a legnagyobb. Vagyis $180° = AB_iB_j\sphericalangle + B_iAB_j\sphericalangle + B_iB_jA\sphericalangle < 3 \cdot B_iAB_j\sphericalangle$, amiből $B_iAB_j\sphericalangle > 60°$, épp amit akartunk.

c) Lehetséges. A 25 gyerekből csináljunk összesen 12 csoportot úgy, hogy egyikben három gyerek van, a többiben kettő-kettő. Az egy csoporton belülieket "közel" tesszük egymáshoz, míg a csoportokat egymástól "távol", hogy biztosan egy csoporton belül dobálják a labdákat. A "közelt" és a "távolt" majd a feladat végén tisztázzuk.

A párok ilyenkor egymásnak fogják dobálni a labdáikat, vagyis a második sípszónál mindkét gyereknél egy-egy labda lesz.

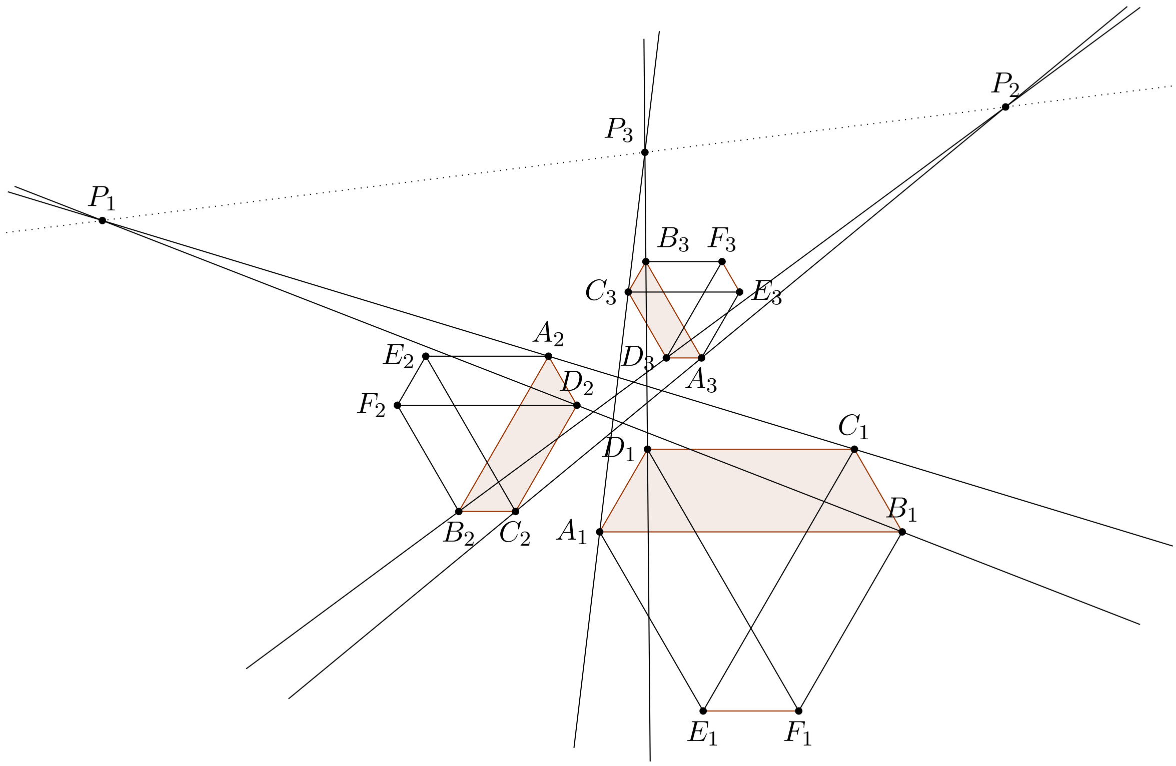
Most nézzük meg a hármas csoportot. Legyen a benne szereplő három gyerek A, B és C úgy, hogy $|AB| < |AC| < |BC|$. Ekkor B és C is A-nak dobja a labdát az első sípszó után, míg A B-nek. A második sípszó után A a két labdáját B-nek és C-nek dobja, míg B az egyetlen labdáját A-nak, vagyis mindenkihez egy labda került, épp ahogy kellett.

Most pedig adjuk meg precízebben a gyerekek helyzetét. Rajzoljunk 12 darab diszjunkt 3 sugarú kört, majd mindegyik körbe ugyanazzal a középponttal egy-egy 1 sugarú kört. Ezután minden csoportot berakunk egy-egy ilyen 1 sugarú körbe úgy, hogy minden körbe pontosan egy csoport kerül. Ekkor egy csoporton belüli két gyerek közti távolság legfeljebb 2, míg két különböző csoportba tartozó gyerek közt a távolság legalább 4. Ezzel teljesül, amit szerettünk volna, vagyis, hogy a labdák ne hagyják el a csoportokat.

4. Legyenek az $A_iB_iC_iD_i$ $(i = 1, 2, 3)$ trapézok hasonlóak és azonos körüljárási irányúak, az A_i-nél és B_i-nél lévő szögeik $60°$-osak, továbbá az A_1B_1, B_2C_2 és A_3D_3 oldalak párhuzamosak. A B_iD_{i+1} és C_iA_{i+1} egyenesek a P_i pontban metszik egymást (az indexek ciklikusan értendők, azaz $A_4 = A_1$ és $D_4 = D_1$). Mutassátok meg, hogy a P_1, P_2 és P_3 pontok egy egyenesre esnek.

Megoldás: Mivel B_1C_1 párhuzamos D_2A_2-vel, ezért van olyan P_1 középpontú φ_1 középpontos nagyítás, amely a B_1, C_1 pontokat rendre D_2-be és A_2-be viszi. Legyen a D_1, A_1 pontok képe ezen nagyításnál E_2 és F_2.

Ugyanígy, van olyan P_2 középpontú φ_2 nagyítás, amely a B_2C_2 szakaszt az D_3A_3 szakaszba viszi. Legyen D_2, A_2 képe E_3, F_3. Vizsgáljuk meg, mi lesz E_2, F_2 képe ezen nagyításnál.



1. ábra

A nagyítás miatt az $F_3D_3A_3E_3$ trapéz hasonló $A_2B_2C_2D_2$-höz. Így hasonló $A_3B_3C_3D_3$-hoz is. Mivel mindketten szimmetrikus trapézok, és az A_3D_3 oldaluk közös, ezért egybevágóak. Világos, hogy mivel a szóban forgó trapézok szögei 60°-osak, ezért $C_3E_3F_3\sphericalangle$ is 60°-os szög, sőt, további szimmetriai megfontolások alapján a $C_3E_3F_3B_3$ négyszög egy olyan szimmetrikus trapéz, amely egybevágó az $A_3B_3C_3D_3$ illetve $F_3D_3A_3E_3$ trapézokkal. Tehát hasonló $A_1B_1C_1D_1$-hez, így $F_2D_2A_2E_2$-höz is, így pedig az E_2, F_2 pontok képe φ_2-nél B_3 és C_3.

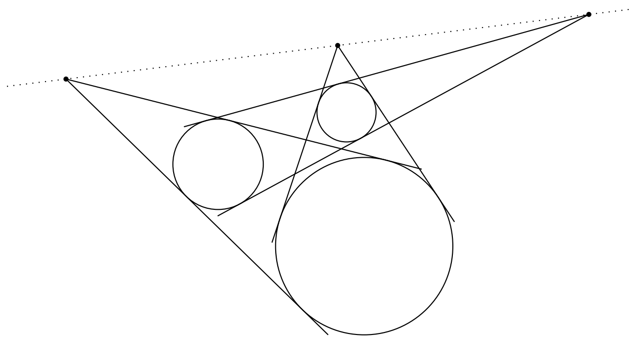
Végül, tekintsük azt a P_3 középpontú φ_3 nagyítást, mely B_3C_3-at D_1A_1-be viszi, és legyen D_3, A_3 képe E_1, F_1. Ugyanúgy mint előbb, E_3, F_3 képe B_1 és C_1.

Sikeresen kiegészítettük az ábrát. A kezdetben egymáshoz képest 120°-os szögben álló $A_iB_iC_iD_i$ trapézok helyett most van három azonos állású $A_iE_iF_iB_iC_iD_i$ hatszögünk. Ráadásul úgy, hogy a φ_1 nagyítás $A_1E_1F_1B_1C_1D_1$-et $F_2B_2C_2D_2A_2E_2$-be viszi, a φ_2 nagyítás ez utóbbit $C_3D_3A_3E_3F_3B_3$-ba, a φ_3 nagyítás pedig ezt vissza $A_1E_1F_1B_1C_1D_1$-be.

Tekintsük a φ_1, φ_2, és φ_3 nagyítások kompozícióját (azaz egymás után elvégzését). Ez az $A_1E_1F_1B_1C_1D_1$ hatszöget elviszi a második, majd a harmadik, végül vissza az első hatszögbe. Tehát az $A_1, E_1, F_1, B_1, C_1, D_1$ pontok fixpontjai a 3 nagyítás kompozíciójának. Mivel azonban hasonlósági transzformációk egymásutánja is valamilyen hasonló transzformáció, ezért az nem csak ezt a 6 pontot, hanem a sík összes pontját fixálja.

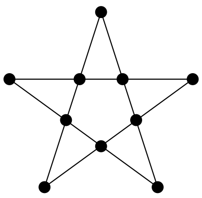
Innen pedig adódik, hogy P_3 rajta van a P_1P_2 egyenesen. Tegyük fel, hogy nem. Ekkor φ_1 a P_1P_2 egyenest fixen hagyja, hiszen a nagyítás középpontja P_1. Ugyancsak fixen hagyja φ_2 a P_1P_2 egyenest. Azonban φ_3 nem hagyja fixen, mert P_3 nincs rajta a P_1P_2 egyenesen a feltevésünk szerint. Tehát a P_1P_2 egyenes nem fix a 3 nagyítás kompozíciójára nézve, ami ellentmondás, hiszen az előbb láttuk, hogy a sík minden pontja fix. Tehát P_3 rajta van a P_1P_2 egyenesen.

Megjegyzés: A feladat szorosan kapcsolódik a Monge-tételhez (2. ábra), annak egyfajta diszkrét verziójának tekinthető.

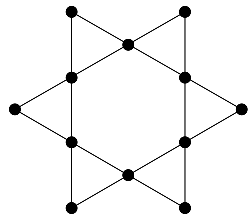


2. ábra

5. a) Lehet-e az ábrán látható 10 ponthoz úgy odaírni a számokat 1-től 10-ig (mindegyiket pontosan egyszer), hogy minden szakaszon a rajta szereplő négy szám összege ugyanannyi legyen?



b) Lehet-e az ábrán látható 12 ponthoz úgy odaírni a számokat 1-től 12-ig (mindegyiket pontosan egyszer), hogy minden szakaszon a rajta szereplő négy szám összege ugyanannyi legyen?



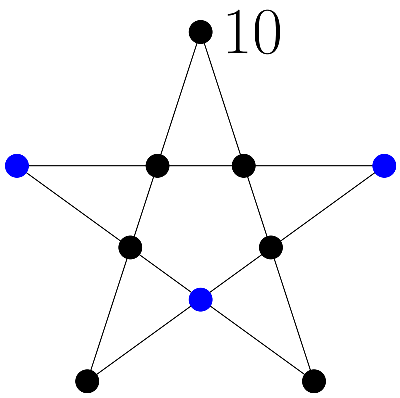
Megoldás: a) Nem lehetséges. Először is határozzuk meg, hogy mennyi a számok összege egy egyenesen. Adjuk össze a számokat az 5 egyenes mentén. Ilyenkor minden számot kétszer számoltunk, azaz összegként $2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 110$-et kapunk. Mivel minden egyenesen ugyanannyi az összeg, ezért egy egyenesen az összeg $\frac{110}{5} = 22$. Nézzük meg, hogy ezek alapján mi állhat a 10-essel egy sorban. Ez a 7 lehetőség van:

$$(10,9,2,1),(10,8,3,1),(10,7,4,1),(10,7,3,2),(10,6,5,1),(10,6,4,2),(10,5,4,3).$$

Bárhova is helyezzük el a 10-es számot, mindenképpen 2 egyenesen lesz rajta, azaz az előző 7 számnégyesből 2 fog szerepelni valamelyik egyenesen. Könnyen meggondolható, hogy a két számnégyesben egyedül a 10-es lesz a közös tag. Megvizsgálva az összes párosítását a számnégyeseknek, az jön ki, hogy csak ez a 3 számnégyespár lehet:

i.$(10,9,2,1)-(10,5,4,3)$ **ii.**$(10,8,3,1)-(10,6,4,2)$ **iii.**$(10,7,3,2)-(10,6,5,1)$

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a legfelső pontra írjuk a 10-es számot.



Ekkor a két számnégyesben nem szereplő számok a kék pontokon fognak elhelyezkedni. A kék pontok páronként egy egyenesen vannak és mindegyik párnál a maradék két pont két különböző számnégyeshez fog tartozni. Nézzük meg az egyes eseteket:

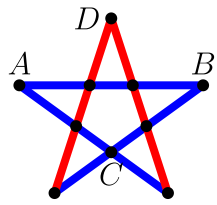
i. Ekkor a kék számok a 6, 7 és 8. Vegyük azt az egyenest, melyen a 6 és a 7 helyezkedik el. Ekkor a maradék két számnak az összege azon az egyenesen 9 lesz. Ez pedig nem állítható elő a két halmaz 1-1 eleméből.

ii. Ekkor a kék számok a 5, 7 és 9. Vegyük azt az egyenest, melyen a 7 és a 9 helyezkedik el. Ekkor a maradék két számnak az összege azon az egyenesen 6 lesz. Ez pedig szintén nem állítható elő a két halmaz 1-1 eleméből.

iii. Ebben az esetben a kék számok a 4, 8 és 9. Vegyük azt az egyenest, melyen a 8 és a 9 helyezkedik el. Ekkor a maradék két számnak az összege azon az egyenesen 5 lesz. Ez pedig szintén nem állítható elő a két halmaz 1-1 eleméből.

Ezzel pedig beláttuk, hogy nem létezik ilyen kitöltése a csillagnak.

2. megoldás az a) részre Itt is használjuk fel, hogy a számok összege egy sorban 22. Vegyük ezt az ábrát:



Az 5 egyenesből tetszőleges három egyenesen lévő számokat összeadom (kék szakaszok), és kettőt meg kivonok belőle (piros szakaszok). Ezek összege 22.

Ekkor a 3 pozitív szakasz metszéspontjait kétszer adtuk össze (A, B és C pont), amiből kivontuk kétszer a két negatív szakasz metszéspontját (D pont), a többi szám 0-szor szerepel.

Azaz például igaz, hogy $(A + B) + (C - D) = 11$. Ebből látszik, hogy $A + B$ nem lehet 11-gyel egyenlő (hasonló módon beláthatjuk, hogy $A + C \neq 11$ és $B + C \neq 11$). Ilyen egyenletet tetszőleges egy szakaszon lévő párra felírhatunk (hiszen a 3 kék szakasz felvehető úgy, hogy tetszőleges egy szakaszon lévő pontpáron legyen 2 kék metszéspont), tehát az biztos, hogy nem lehet ugyanazon a szakaszon az 1 és a 10.

Vegyünk két olyan pontot, amik nincsenek egy szakaszon (legyen az egyik 1, a másik 10). Az 1-en átmenő két szakasz legyen negatív, a többi pozitív (jelen ábrán a D pont lenne ez). Ekkor a 10-es két kék szakasz metszéspontjánál lesz, mivel nem lehet piroson, mert akkor azonos szakaszon lenne az 1-essel. Ekkor a 10-es a 3 kék metszéspont valamelyikén lesz. A másik 2 kék szakaszokon lévő metszéspontot jelöljük x-szel és y-nal. Az előzőek alapján $x + y + 10 - 1 = 11$, de ebből az jönne ki, hogy x + y = 2, ami nyilván nem lehet.

Ezzel kész vagyunk.

b) Létezik ilyen kitöltés: