Helyi forduló

2016. november 11.

Matematika feladatsor

11 - 12. osztályosok

D+ kategória

---

1. A játszótéren 25 gyerek áll úgy, hogy a köztük fellépő távolságok mind különbözőek. Kezdetben mindegyiküknél egy labda van. Ha a tanár megfújja a sípját, minden gyerek eldobja az összes nála lévő labdát a hozzá legközelebb álló gyereknek.

a) Lehetséges-e, hogy néhány sípszó után az összes labda egy gyereknél van?

b) Igazoljátok, hogy egyik gyerekhez se kerülhetett ötnél több labda az első sípszó után.

Ezután a 25 gyerek egy másik játékba kezd. Továbbra is úgy állnak, hogy a köztük fellépő távolságok mind különbözőek, és kezdetben mindenkinél egy labda van. Az első sípszó után minden gyerek eldobja a labdát a hozzá legközelebb álló gyereknek. Ám a második sípszóra mindenki úgy dobja el a nála lévő labdákat, hogy ha valakihez k labda került az első sípszó után, akkor a hozzá legközelebb álló k gyereknek dob egyet-egyet.

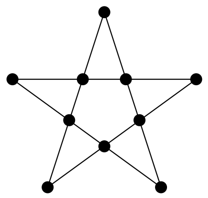
c) Lehetséges-e, hogy ezután mindenkinél pontosan egy labda lesz?

2. Legyenek az $A_iB_iC_iD_i$ $(i = 1, 2, 3)$ trapézok hasonlóak és azonos körüljárási irányúak, az A_i-nél és B_i-nél lévő szögeik $60°$-osak, továbbá az A_1B_1, B_2C_2 és A_3D_3 oldalak párhuzamosak. A B_iD_{i+1} és C_iA_{i+1} egyenesek a P_i pontban metszik egymást (az indexek ciklikusan értendők, azaz $A_4 = A_1$ és $D_4 = D_1$). Mutassátok meg, hogy a P_1, P_2 és P_3 pontok egy egyenesre esnek.

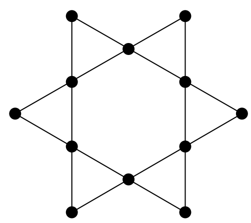
3. Adott egy $N \times N$-es táblázat, kezdetben minden mezőjén 0 áll. Egy lépésben kiválaszthatunk egy sort vagy egy oszlopot, az addig ott szereplő elemeket kitöröljük, és helyükre írjuk az $1, 2, \ldots, N$ számokat tetszőleges sorrendben. Néhány ilyen lépés elvégzése után legfeljebb mekkora lehet a táblázatban szereplő számok összege?

4. Milyen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egész számok esetén lesz a $b_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n$ $(n \in \mathbb{N})$ számoknak együttesen csak véges sok prímosztójuk?

5. a) Lehet-e az ábrán látható 10 ponthoz úgy odaírni a számokat 1-től 10-ig (mindegyiket pontosan egyszer), hogy minden szakaszon a rajta szereplő négy szám összege ugyanannyi legyen?



b) Lehet-e az ábrán látható 12 ponthoz úgy odaírni a számokat 1-től 12-ig (mindegyiket pontosan egyszer), hogy minden szakaszon a rajta szereplő négy szám összege ugyanannyi legyen?



Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 10 pontot ér. Összesen 50 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a X. Dürer Verseny szervezői