1. A játszótéren 25 gyerek áll úgy, hogy a köztük fellépő távolságok mind különbözőek. Kezdetben mindegyiküknél egy labda van. Ha a tanár megfújja a sípját, minden gyerek eldobja az összes nála lévő labdát a hozzá legközelebb álló gyereknek.

a) Lehetséges-e, hogy néhány sípszó után az összes labda egy gyereknél van?

b) Igazoljátok, hogy egyik gyerekhez se kerülhetett ötnél több labda az első sípszó után.

Ezután a 25 gyerek egy másik játékba kezd. Továbbra is úgy állnak, hogy a köztük fellépő távolságok mind különbözőek, és kezdetben mindenkinél egy labda van. Az első sípszó után minden gyerek eldobja a labdát a hozzá legközelebb álló gyereknek. Ám a második sípszóra mindenki úgy dobja el a nála lévő labdákat, hogy ha valakihez k labda került az első sípszó után, akkor a hozzá legközelebb álló k gyereknek dob egyet-egyet.

c) Lehetséges-e, hogy ezután mindenkinél pontosan egy labda lesz?

Megoldás: a) Nem lehet. A 25 gyerek között fellép $\binom{25}{2}$ távolság, ezek mind különbözőek, így van köztük legkisebb. Legyen ez az A és B gyerek közti távolság. A mindenképpen B-nek dobja a labdáit, hiszen A-hoz senki nem lehet közelebb, mint B, mert a legkisebbnek az AB távolságot vettük. Hasonlóan, B is csak A-nak dobhatja a labdáit.

Nézzük azt a két labdát, melyek kezdetben A-nál, illetve B-nél voltak. Ezeket minden sípszó után átdobják a másiknak, így a kezdetben A-nál lévő labda páratlan sípszó után B-nél, páros sípszó után A-nál van, és hasonlóan, a kezdetben B-nél lévő labda páratlan sípszó után A-nál, páros sípszó után B-nél van. Vagyis A-hoz is és B-hez is mindig kerül labda, így nem lehet, hogy egyetlen gyerekhez kerül az összes.

2. megoldás az a) részre Vegyük azt az irányított gráfot, ahol a gyerekek a csúcsok, és egy irányított élt akkor húzunk be A-ból B-be, ha az A-hoz legközelebbi gyerek B, azaz A mindig B-nek dobja a labdáit. Ebben a gráfban minden csúcsnak 1 a kifoka, vagyis ha tetszőleges csúcsból elindulunk egy irányított séta mentén, akkor minden csúcsból egyértelműen tudunk továbblépni. Mivel csak véges sok csúcs van, így előbb-utóbb olyan csúcsra lépünk, ahol már jártunk, és ezzel találunk egy irányított kört a gráfban, mely legalább 2 élből áll, hiszen hurokél nem lehetett a gráfban. Legyenek ennek a körnek a csúcsai sorrendben $A_1, A_2, \dots A_k$.

Kezdetben legyen A_i-nél az L_i labda. Látható, hogy ezen labdák akárhány sípszó után is ebben a körben lesznek, azaz valamelyik A_j gyereknél. s-re vonatkozó indukcióval könnyen belátható, hogy az L_i labda s sípszó után az A_j gyereknél van pontosan akkor, ha $j \equiv i + s \pmod{k}$.

Ebből könnyen kiszámolható, hogy az A_j gyereknél s sípszó után van labda, mégpedig az az L_i, melyre $i \equiv j - s \pmod{k}$. Vagyis a körben álló $k \geq 2$ gyerek mindegyikénél mindig van labda, így nem kerülhet egyetlen gyerekhez az összes labda.

Megjegyzés: A 2. megoldás nem használta ki, hogy mindenki a hozzá legközelebbinek dobja a labdáit, csak azt, hogy minden sípszó után ugyanannak dobja. Ezzel egy általánosabb feladatot oldottunk meg, ugyanakkor bonyolultabban, hiszen az 1. megoldásban a kör megtalálása egyből adódik a legkisebb távolság két végpontján, és annak is egyszerűbb a bizonyítása, hogy mindegyiküknél mindig van labda.

b) Tegyük fel, hogy az A gyereknek dobja a labdáját $B_1, B_2, \dots B_k$, mégpedig úgy, hogy ha A körbefordul, akkor ilyen sorrendben látja őket. Meg fogjuk mutatni, hogy $B_iAB_j\sphericalangle > 60°$ minden $i \neq j$-re, így speciálisan a szomszédosok közti szög sem lehet ennél kisebb. Márpedig a B_1AB_2, B_2AB_3, …, B_kAB_1 szögtartományok épp lefedik a síkot, vagyis $360° = B_1AB_2\sphericalangle + B_2AB_3\sphericalangle + \dots + B_kAB_1\sphericalangle > k \cdot 60°$, amiből $6 > k$, vagyis $k \leq 5$, és épp ezt kell belátni.

Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy $B_iAB_j\sphericalangle > 60°$. B_i a labdáját A-nak dobja, nem B_j-nek (vagy bárki másnak), így $|B_iA| < |B_iB_j|$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $|B_jA| < |B_jB_i|$. Vagyis az AB_iB_j háromszögben a B_iB_j a leghosszabb oldal, és így a vele szemközti szög a legnagyobb. Vagyis $180° = AB_iB_j\sphericalangle + B_iAB_j\sphericalangle + B_iB_jA\sphericalangle < 3 \cdot B_iAB_j\sphericalangle$, amiből $B_iAB_j\sphericalangle > 60°$, épp amit akartunk.

c) Lehetséges. A 25 gyerekből csináljunk összesen 12 csoportot úgy, hogy egyikben három gyerek van, a többiben kettő-kettő. Az egy csoporton belülieket "közel" tesszük egymáshoz, míg a csoportokat egymástól "távol", hogy biztosan egy csoporton belül dobálják a labdákat. A "közelt" és a "távolt" majd a feladat végén tisztázzuk.

A párok ilyenkor egymásnak fogják dobálni a labdáikat, vagyis a második sípszónál mindkét gyereknél egy-egy labda lesz.

Most nézzük meg a hármas csoportot. Legyen a benne szereplő három gyerek A, B és C úgy, hogy $|AB| < |AC| < |BC|$. Ekkor B és C is A-nak dobja a labdát az első sípszó után, míg A B-nek. A második sípszó után A a két labdáját B-nek és C-nek dobja, míg B az egyetlen labdáját A-nak, vagyis mindenkihez egy labda került, épp ahogy kellett.

Most pedig adjuk meg precízebben a gyerekek helyzetét. Rajzoljunk 12 darab diszjunkt 3 sugarú kört, majd mindegyik körbe ugyanazzal a középponttal egy-egy 1 sugarú kört. Ezután minden csoportot berakunk egy-egy ilyen 1 sugarú körbe úgy, hogy minden körbe pontosan egy csoport kerül. Ekkor egy csoporton belüli két gyerek közti távolság legfeljebb 2, míg két különböző csoportba tartozó gyerek közt a távolság legalább 4. Ezzel teljesül, amit szerettünk volna, vagyis, hogy a labdák ne hagyják el a csoportokat.

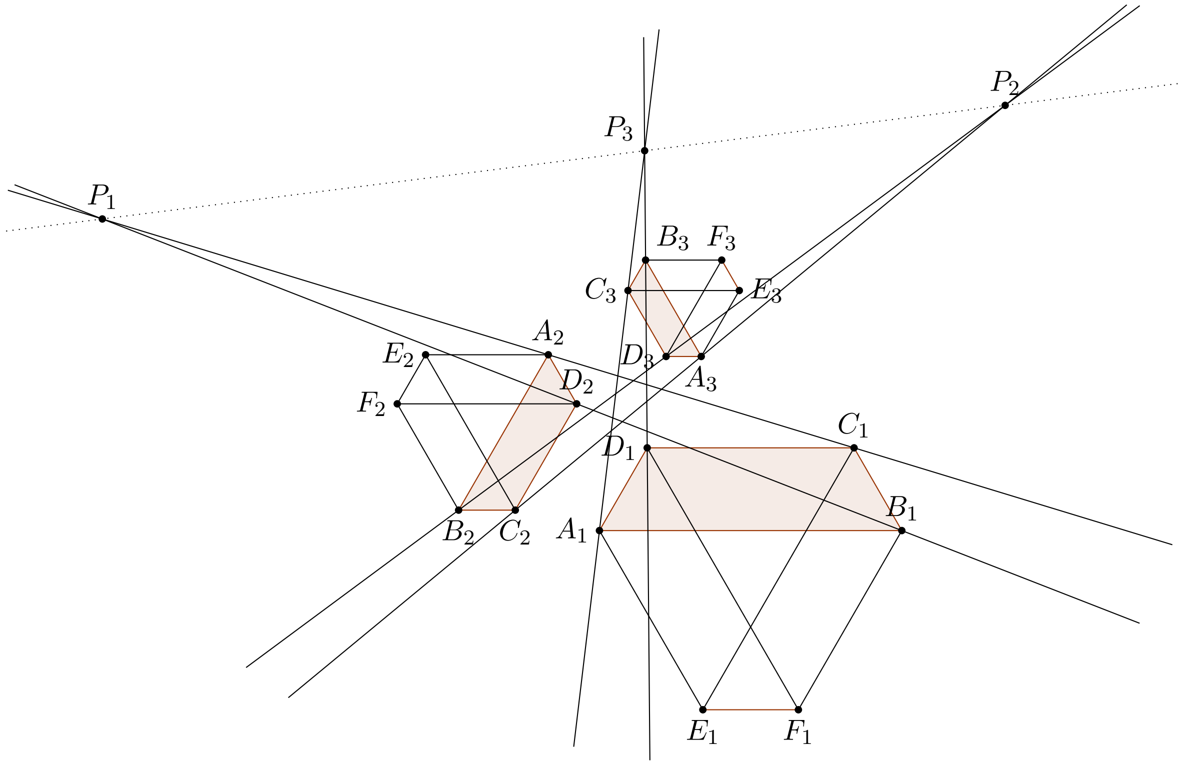
2. Legyenek az $A_iB_iC_iD_i$ $(i = 1, 2, 3)$ trapézok hasonlóak és azonos körüljárási irányúak, az A_i-nél és B_i-nél lévő szögeik 60°-osak, továbbá az A_1B_1, B_2C_2 és A_3D_3 oldalak párhuzamosak. A B_iD_{i+1} és C_iA_{i+1} egyenesek a P_i pontban metszik egymást (az indexek ciklikusan értendők, azaz $A_4 = A_1$ és $D_4 = D_1$). Mutassátok meg, hogy a P_1, P_2 és P_3 pontok egy egyenesre esnek.

Megoldás: Mivel B_1C_1 párhuzamos D_2A_2-vel, ezért van olyan P_1 középpontú φ_1 középpontos nagyítás, amely a B_1, C_1 pontokat rendre D_2-be és A_2-be viszi. Legyen a D_1, A_1 pontok képe ezen nagyításnál E_2 és F_2.

Ugyanígy, van olyan P_2 középpontú φ_2 nagyítás, amely a B_2C_2 szakaszt az D_3A_3 szakaszba viszi. Legyen D_2, A_2 képe E_3, F_3. Vizsgáljuk meg, mi lesz E_2, F_2 képe ezen nagyításnál.

A nagyítás miatt az $F_3D_3A_3E_3$ trapéz hasonló $A_2B_2C_2D_2$-höz. Így hasonló $A_3B_3C_3D_3$-hoz is. Mivel mindketten szimmetrikus trapézok, és az A_3D_3 oldaluk közös, ezért egybevágóak. Világos, hogy mivel a szóban forgó trapézok szögei 60°-osak, ezért $C_3E_3F_3\sphericalangle$ is 60°-os szög, sőt, további szimmetriai megfontolások alapján a $C_3E_3F_3B_3$ négyszög egy olyan szimmetrikus trapéz, amely egybevágó az $A_3B_3C_3D_3$ illetve $F_3D_3A_3E_3$ trapézokkal. Tehát hasonló $A_1B_1C_1D_1$-hez, így $F_2D_2A_2E_2$-höz is, így pedig az E_2, F_2 pontok képe φ_2-nél B_3 és C_3.

Végül, tekintsük azt a P_3 középpontú φ_3 nagyítást, mely B_3C_3-at D_1A_1-be viszi, és legyen D_3, A_3 képe E_1, F_1. Ugyanúgy mint előbb, E_3, F_3 képe B_1 és C_1.

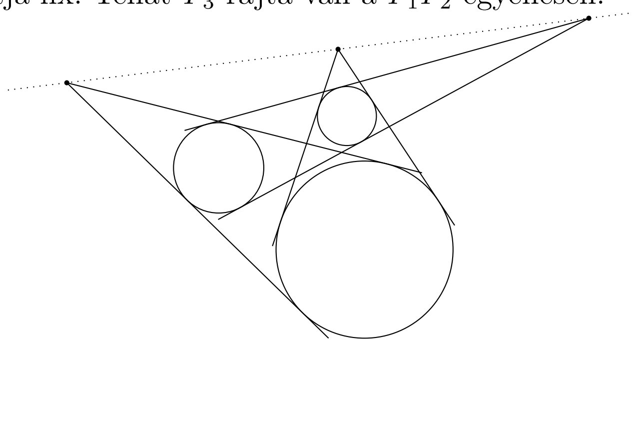


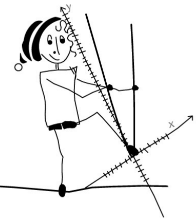
Sikeresen kiegészítettük az ábrát. A kezdetben egymáshoz képest 120°-os szögben álló $A_iB_iC_iD_i$ trapézok helyett most van három azonos állású $A_iE_iF_iB_iC_iD_i$ hatszögünk. Ráadásul úgy, hogy a φ_1 nagyítás $A_1E_1F_1B_1C_1D_1$-et $F_2B_2C_2D_2A_2E_2$-be viszi, a φ_2 nagyítás ez utóbbit $C_3D_3A_3E_3F_3B_3$-ba, a φ_3 nagyítás pedig ezt vissza $A_1E_1F_1B_1C_1D_1$-be.

Tekintsük a φ_1, φ_2, és φ_3 nagyítások kompozícióját (azaz egymás után elvégzését). Ez az $A_1E_1F_1B_1C_1D_1$ hatszöget elviszi a második, majd a harmadik, végül vissza az első hatszögbe. Tehát az $A_1, E_1, F_1, B_1, C_1, D_1$ pontok fixpontjai a 3 nagyítás kompozíciójának. Mivel azonban hasonlósági transzformációk egymásutánja is valamilyen hasonló transzformáció, ezért az nem csak ezt a 6 pontot, hanem a sík összes pontját fixálja.

Innen pedig adódik, hogy P_3 rajta van a P_1P_2 egyenesen. Tegyük fel, hogy nem. Ekkor φ_1 a P_1P_2 egyenest fixen hagyja, hiszen a nagyítás középpontja P_1. Ugyancsak fixen hagyja φ_2 a P_1P_2 egyenest. Azonban φ_3 nem hagyja fixen, mert P_3 nincs rajta a P_1P_2 egyenesen a feltevésünk szerint. Tehát a P_1P_2 egyenes nem fix a 3 nagyítás kompozíciójára nézve, ami ellentmondás, hiszen az előbb láttuk, hogy a sík minden pontja fix. Tehát P_3 rajta van a P_1P_2 egyenesen.

Megjegyzés: A feladat szorosan kapcsolódik a Monge-tételhez (2. ábra), annak egyfajta diszkrét verziójának tekinthető.





3. Adott egy $N \times N$-es táblázat, kezdetben minden mezőjén 0 áll. Egy lépésben kiválaszthatunk egy sort vagy egy oszlopot, az addig ott szereplő elemeket kitöröljük, és helyükre írjuk az $1, 2, \ldots, N$ számokat tetszőleges sorrendben. Néhány ilyen lépés elvégzése után legfeljebb mekkora lehet a táblázatban szereplő számok összege?

Megoldás: A legmagasabb elérhető összeg $\frac{2}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{6}N$.

Ez elérhető pl. a következő módon: kitöltjük sorban az N. sort, az N. oszlopot, az $N-1$. sort, az $N-1$. oszlopot, az $N-2$. sort, az $N-2$. oszlopot stb., végül az 1. sort majd az 1. oszlopot, mindig balról jobbra, ill. fentről lefelé növekvő sorrendben. Az eredményül kapott táblázat i. sorának j. eleme $\max(i, j)$ (azaz i és j közül a nagyobb). Például $N = 5$ esetén a jobb oldali ábrán látható táblázatot kapjuk.

1	2	3	4	5
2	2	3	4	5
3	3	3	4	5
4	4	4	4	5
5	5	5	5	5

Így a k szám ($k = 1, ..., N$) $2k-1$-szer szerepel, tehát a táblázatban szereplő számok összege

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1)k = 2\sum_{k=1}^{N}k^2 - \sum_{k=1}^{N}k = 2\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) - \left(\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}\right) = \frac{2}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{6}N.$$

Megmutatjuk, hogy ennél nagyobb összeget nem lehet elérni. Tekintsük ugyanis azt az (egyik) eljárást, amelyik a legnagyobb összeget eredményezi. Az eredményül kapott táblázat összegét kiszámíthatjuk úgy, hogy minden lépésnél tekintjük az akkor beírt számok közül azoknak az összegét, amelyeket később nem törlünk le, és ezeket az összegeket összeadjuk. Feltehetjük, hogy minden sort és minden oszlopot pontosan egyszer töltünk ki. Ha ugyanis egy sort vagy oszlopot többször is kitöltünk, akkor a legkésőbbi kitöltés felülírja a korábbiakat, így a korábbi kitöltéseket elhagyhatjuk. Ha pedig egy sort vagy oszlopot egyszer sem választunk, akkor a most tekintett eljárást módosíthatjuk úgy, hogy a legelején kitöltjük a szóban forgó sort vagy oszlopot; ezzel az összeget csak növelhetjük. Így tehát eljárásunk $2N$ lépésből áll.

Legyen $a_i = \mathbf{s}$, ha az i. lépésben egy sort töltünk ki, és $a_i = \mathbf{o}$, ha oszlopot ($i = 1, \ldots, 2N$). Legyen továbbá

$$b_i = \begin{cases} \mathbf{o}\text{-k száma } a_{i+1}, \ldots, a_{2N} \text{ között} & \text{ha } a_i = \mathbf{s} \\ \mathbf{s}\text{-ek száma } a_{i+1}, \ldots, a_{2N} \text{ között} & \text{ha } a_i = \mathbf{o} \end{cases}.$$

Könnyen látható, hogy az i. lépésben beírt számok közül pontosan b_i számot törlünk le és írunk felül a későbbi lépések során; $N - b_i$-t viszont nem fogunk letörölni. Az utóbbi számok összege akkor a legnagyobb, ha ezekre a helyekre a $b_i + 1, b_i + 2, \ldots, N$ számokat írjuk – ezek összege $\frac{(N+b_i+1)(n-b_i)}{2}$. Az eredményül kapott táblázat összege tehát legfeljebb $\sum_{i=1}^{2N} \frac{(N+b_i+1)(n-b_i)}{2}$.

A megoldás elején leírt példában az a_i sorozat értékei felváltva $\mathbf{s}, \mathbf{o}, \mathbf{s}, \mathbf{o}, \ldots, \mathbf{s}, \mathbf{o}$, a b_i-k értékei pedig $N, N-1, N-1, N-2, N-2, N-3, N-3, N-4, \ldots, 3, 2, 2, 1, 1, 0$ (azaz $N - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$). A példának megvan továbbá az a tulajdonsága is, hogy minden lépésben azokra a helyekre írjuk a legnagyobb számokat, amelyeket később sem törlünk le. Elég tehát megmutatni, hogy akárhogy írunk N db $\mathbf{s}$-t és N db $\mathbf{o}$-t az a_i sorozatba (azaz akárhogy határozzuk meg, hogy melyik lépésekben töltünk ki sort és melyikekben oszlopot), a $\sum_{i=1}^{2N} \frac{(N+b_i+1)(N-b_i)}{2}$ összeg nem lehet nagyobb, mint a példában.

Ha minden *páratlan* j-re $a_j \neq a_{j+1}$ (azaz az egyik $\mathbf{s}$ és a másik $\mathbf{o}$), akkor könnyen ellenőrizhető, hogy változatlanul minden i-re $b_i = N - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, így a maximális összeg se változik. Tegyük fel most, hogy nem ez a helyzet, és tekintsük a *legnagyobb* páratlan l-et, amelyre $a_l = a_{l+1}$. Legyen k a legnagyobb, l-nél kisebb index, amelyre $a_k \neq a_l$.

$$\text{Pl. } \ldots\ldots, \overset{k}{\mathbf{o}}, \mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{s}, \underbrace{\overset{l}{\mathbf{s}}, \mathbf{s}}, \underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{o}}, \underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{o}}, \underbrace{\mathbf{o}, \mathbf{s}}$$

(Az a_i-k között összesen ugyanannyi (N db) **s** és **o** van, és csak a_{l+2}-től a_{2N}-ig kezdve szintén ugyanannyi van, úgyhogy ilyen k létezik.) Ekkor $b_k \geq b_{k+1}+2$. Cseréljük most fel a_k-t és a_{k+1}-et, és jelöljük az új b_i-ket vesszővel. $b'_{k+1} = b_k - 1$, és $b'_k = b_{k+1} + 1$, míg a többi b_i nem változik. Ekkor

$$\frac{(N+b'_k+1)(N-b'_k)}{2} + \frac{(N+b'_{k+1}+1)(N-b'_{k+1})}{2} =$$
$$= \frac{(N+b_{k+1}+2)(N-b_{k+1}-1)}{2} + \frac{(N+b_k)(N-b_k+1)}{2} =$$
$$\frac{(N+b_k+1)(N-b_k)}{2} + \frac{(N+b_{k+1}+1)(N-b_{k+1})}{2} + \underbrace{(b_k - b_{k+1} - 1)}_{>0,\text{ mert } b_k \geq b_{k+1}+2},$$

tehát a $\sum_{i=1}^{2N} \frac{(N+b_i+1)(N-b_i)}{2}$ összeg nő. Tehát a korábbi sorrend nem adhatta a legnagyobb összegű táblázatot.

4. Milyen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egész számok esetén lesz a $b_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n$ ($n \in \mathbb{N}$) számoknak együttesen csak véges sok prímosztójuk?

Megoldás: Ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$, akkor $b_n = k \cdot a^n$, tehát tetszőleges n-re b_n osztói az a és k számok osztói, tehát összesen is véges sokan vannak.

Megmutatjuk, hogy az előző, triviális eseten kívül mindig végtelen sok prímosztója van a b_n számoknak. Feltehetjük, hogy a számoknak nincsen közös prímosztójuk, azaz $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$. Indirekten okoskodunk, feltesszük, hogy a b_n számoknak csak véges sok prímosztójuk van. Jelölje ezeket $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Célunk, hogy egy olyan b_n számot konstruáljunk, amelynek egyik prím sem lehet osztója. Tetszőleges a egész számra igaz, hogy ha a $p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$-edik hatványra emeljük, akkor 0 vagy 1 maradékot ad $p_i^{\alpha_i}$-nel osztva. (Ez az Euler-Fermat-tétel prímhatványokra vonatkozó állításának egyszerű következménye.)

Legyen $n = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdot p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1) \cdot A$, méghozzá úgy, hogy minden i-re $p_i^{\alpha_i}$ legyen k-nál nagyobb (α_i tetszőleges pozitív egész). Ekkor egy tetszőleges szám n-edik hatványa 0-t vagy 1-et ad maradékul $p_i^{\alpha_i}$-nel osztva. Tehát b_n maradéka 0 és k között van. 0 azonban nem lehet az összeg, mert akkor mindegyik osztható lenne $p_i^{\alpha_i}$-nel, és ez ellentmondana annak, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok relatív prímek. k kisebb, mint $p_i^{\alpha_i}$, ezért b_n-t p_i legfeljebb $\alpha_i - 1$-ik hatványa oszthatja. Azaz

$$b_n \leq p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1}.$$

Ez azonban ellentmond annak, hogy A-t tetszőlegesen nagynak választhatjuk.

Megjegyzés: A feladat szövegébe sajnálatos módon hiba csúszott: *pozitív* egész a_i-kre akartuk feladni. A fent ismertetett megoldás is ilyenekről szól, ugyanakkor nem nehéz kiegészíteni, hogy működjön általánosan.

A lehetséges megoldások ekkor olyan alakúak, hogy valamilyen pozitív egész a-ra minden $a_i \in \{a, -a, 0\}$. Ezek láthatóan jók lesznek, ám két apróbb probléma felmerülhet. Az egyik, hogy $n = 0$ esetén a 0^0 kifejezést hogyan értelmezzük? Ha bármilyen értéket is adunk neki, akkor a megoldás nem változik, hiszen az eredeti véges sok prímünk legfeljebb véges sok prímmel egészül ki, hiszen csak az $n = 0$ esetbe zavarhat ez bele. Természetesen az se baj, ha 0^0 kifejezést nem értelmezzük, és ekkor úgy tekintjük, hogy semelyik a_i nem lehet 0. Egy másik problémás eset lehet még, ha ugyanannyi a van, mint $-a$, hiszen ekkor páratlan n esetén $b_n = 0$ lenne, és 0-t minden prím oszt. Ugyanakkor definíció szerint nincs prímfelbontása, így akár lehet azt is mondani, hogy nincs prímosztója.

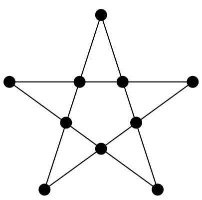
Ha már csak a nem 0 elemekkel foglalkozunk, a bizonyítás is könnyen kiegészíthető. Minden a_i helyett $a_i' = a_i^2 > 0$ értéket véve alkalmazható a fenti gondolatmenet, melyből megkapjuk, hogy az összes a_i^2 érték megegyezik, vagyis valamilyen a pozitív egészre minden $a_i \in \{a, -a\}$.

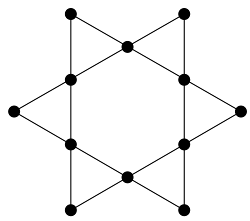
A hibáért ezúton is elnézést kérünk!

Megjegyzés: A feladat Pólya Györgytől származik (forrás: Komjáth Péter *Híres matematikusok* c. kurzusa).

5. a) Lehet-e az ábrán látható 10 ponthoz úgy odaírni a számokat 1-től 10-ig (mindegyiket pontosan egyszer), hogy minden szakaszon a rajta szereplő négy szám összege ugyanannyi legyen?

b) Lehet-e az ábrán látható 12 ponthoz úgy odaírni a számokat 1-től 12-ig (mindegyiket pontosan egyszer), hogy minden szakaszon a rajta szereplő négy szám összege ugyanannyi legyen?





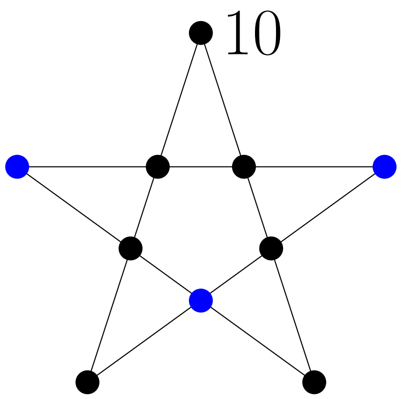
Megoldás: a) Nem lehetséges. Először is határozzuk meg, hogy mennyi a számok összege egy egyenesen. Adjuk össze a számokat az 5 egyenes mentén. Ilyenkor minden számot kétszer számoltunk, azaz összegként $2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 110$-et kapunk. Mivel minden egyenesen ugyanannyi az összeg, ezért egy egyenesen az összeg $\frac{110}{5} = 22$. Nézzük meg, hogy ezek alapján mi állhat a 10-essel egy sorban. Ez a 7 lehetőség van:

$$(10,9,2,1),(10,8,3,1),(10,7,4,1),(10,7,3,2),(10,6,5,1),(10,6,4,2),(10,5,4,3).$$

Bárhova is helyezzük el a 10-es számot, mindenképpen 2 egyenesen lesz rajta, azaz az előző 7 számnégyesből 2 fog szerepelni valamelyik egyenesen. Könnyen meggondolható, hogy a két számnégyesben egyedül a 10-es lesz a közös tag. Megvizsgálva az összes párosítását a számnégyeseknek, az jön ki, hogy csak ez a 3 számnégyespár lehet:

i.$(10,9,2,1)-(10,5,4,3)$ **ii.**$(10,8,3,1)-(10,6,4,2)$ **iii.**$(10,7,3,2)-(10,6,5,1)$

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a legfelső pontra írjuk a 10-es számot.



Ekkor a két számnégyesben nem szereplő számok a kék pontokon fognak elhelyezkedni. A kék pontok páronként egy egyenesen vannak és mindegyik párnál a maradék két pont két különböző számnégyeshez fog tartozni. Nézzük meg az egyes eseteket:

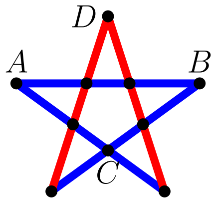
i. Ekkor a kék számok a 6, 7 és 8. Vegyük azt az egyenest, melyen a 6 és a 7 helyezkedik el. Ekkor a maradék két számnak az összege azon az egyenesen 9 lesz. Ez pedig nem állítható elő a két halmaz 1-1 eleméből.

ii. Ekkor a kék számok a 5, 7 és 9. Vegyük azt az egyenest, melyen a 7 és a 9 helyezkedik el. Ekkor a maradék két számnak az összege azon az egyenesen 6 lesz. Ez pedig szintén nem állítható elő a két halmaz 1-1 eleméből.

iii. Ebben az esetben a kék számok a 4, 8 és 9. Vegyük azt az egyenest, melyen a 8 és a 9 helyezkedik el. Ekkor a maradék két számnak az összege azon az egyenesen 5 lesz. Ez pedig szintén nem állítható elő a két halmaz 1-1 eleméből.

Ezzel pedig beláttuk, hogy nem létezik ilyen kitöltése a csillagnak.

2. megoldás az a) részre Itt is használjuk fel, hogy a számok összege egy sorban 22. Vegyük ezt az ábrát:



Az 5 egyenesből tetszőleges három egyenesen lévő számokat összeadom (kék szakaszok), és kettőt meg kivonok belőle (piros szakaszok). Ezek összege 22.

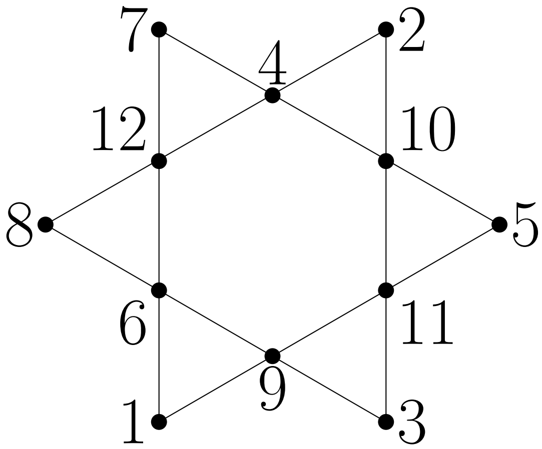
Ekkor a 3 pozitív szakasz metszéspontjait kétszer adtuk össze (A, B és C pont), amiből kivontuk kétszer a két negatív szakasz metszéspontját (D pont), a többi szám 0-szor szerepel.

Azaz például igaz, hogy $(A + B) + (C - D) = 11$. Ebből látszik, hogy $A + B$ nem lehet 11-gyel egyenlő (hasonló módon beláthatjuk, hogy $A+C \neq 11$ és $B+C \neq 11$). Ilyen egyenletet tetszőleges egy szakaszon lévő párra felírhatunk (hiszen a 3 kék szakasz felvehető úgy, hogy tetszőleges egy szakaszon lévő pontpáron legyen 2 kék metszéspont), tehát az biztos, hogy nem lehet ugyanazon a szakaszon az 1 és a 10.

Vegyünk két olyan pontot, amik nincsenek egy szakaszon (legyen az egyik 1, a másik 10). Az 1-en átmenő két szakasz legyen negatív, a többi pozitív (jelen ábrán a D pont lenne ez). Ekkor a 10-es két kék szakasz metszéspontjánál lesz, mivel nem lehet piroson, mert akkor azonos szakaszon lenne az 1-essel. Ekkor a 10-es a 3 kék metszéspont valamelyikén lesz. A másik 2 kék szakaszokon lévő metszéspontot jelöljük x-szel és y-nal. Az előzőek alapján $x+y+10-1 = 11$, de ebből az jönne ki, hogy x + y = 2, ami nyilván nem lehet.

Ezzel kész vagyunk.

b) Létezik ilyen kitöltés:


7
2
4
12
10
8
5
6
11
9
1
3