Helyi forduló

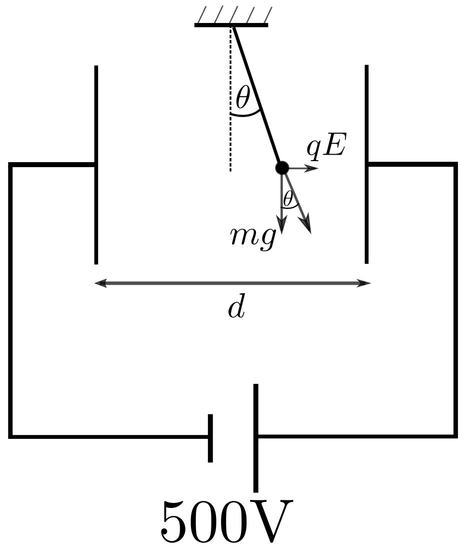
2016. november 11.

Fizika megoldókulcs

11 - 12. osztályosok

F kategória

1. feladat



Jelölje θ az inga kitérési szögét az ábrán látható módon! Abban a pillanatban amikor az inga éppen hozzáér a kondenzátor lemezéhez teljesül az $l \sin\theta = d/2$ összefüggés. Ezen felül, mivel a lemezeket végtelenül lassan nyomjuk össze, az inga végig egyensúlyban van, vagyis az inga kötélereje éppen kiegyenlíti az inga végpontjára ható nehézségi és elektrosztatikus erők eredőjét. Ennek következtében teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{qE}{mg} = \frac{qU}{mgd}, \tag{1}$$

ahol kihasználtuk, hogy $Ed = U$ a kondenzárorra kapcsolt feszültség, amit az összenyomás alatt állandó értéken tartunk. Abban a pillanatban tehát, amikor az inga hozzáér a kondenzátor lemezéhez azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{qU}{2mgl} = \frac{5}{4}. \tag{2}$$

Az utolsó lépésben beírtuk a feladat paramétereit (a nehézségi gyorsulás értékét vehetjük $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$-nek). Ezt átrendezve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk $\cos\theta$-ra:

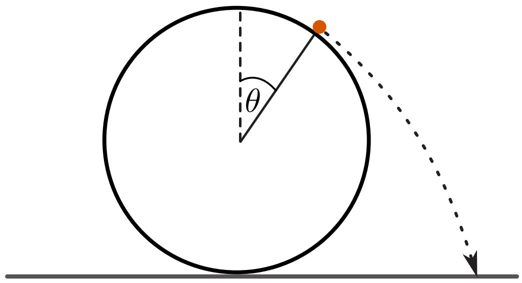
$$4\cos^2\theta + 5\cos\theta - 4 = 0, \tag{3}$$

amelynek megoldása $\cos\theta = (\sqrt{89} - 5)/8$. A keresett távolság tehát

$$d = 2l\sin\theta = 2l\sqrt{1 - \cos^2\theta} \approx 1,664\ \mathrm{m}. \tag{4}$$

2. feladat

Első lépésként határozzuk meg azt a pontot, ahol a homokszem elhagyja a gömb felületét! Ez akkor következik be, amikor a homokszemre ható, a gömbfelületre merőleges kényszererő éppen



nullává válik. Jelölje ebben a pontban θ azt a szöget, amelyet a gömbnek a homokszemhez húzott sugara a függőlegessel bezár, az ábrán látható módon. Ekkor a kényszererő eltűnésére vonatkozó feltétel

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}, \tag{5}$$

ahol v a homokszem sebességének nagysága abban a pillanatban amikor elhagyja a gömb felületét. Az energiamegmaradás értelmében

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\cos\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR. \tag{6}$$

Behelyettesítve az (5)-ös egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\cos\theta = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}, \tag{7}$$

a sebesség pedig

$$v = \sqrt{gR\cos\theta} = \sqrt{3/4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{8}$$

Az elválás pillanatában a homokszemnek az asztallaptól mért magassága $h = R(1+\cos\phi) = 7R/4$, a kiindulási pontjától mért vízszines távolsága pedig $R\sin\phi = \sqrt{7}R/4$. A homokszem további mozgása ferde hajításként írható le. A kezdősebesség vízszintes, illetve függőleges komponense:

$$v_x = v\cos\theta = \frac{3\sqrt{3}}{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_y = v\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{9}$$

A földetérésig eltelt időt a

$$\frac{g}{2}t^2 + v_y t = h \tag{10}$$

egyenlet megoldása adja. A fizikailag értelmes megoldás:

$$t = \frac{\sqrt{v_y^2 + 2gh} - v_y}{g} = \frac{7\sqrt{5} - \sqrt{21}}{80}\ \mathrm{s}, \tag{11}$$

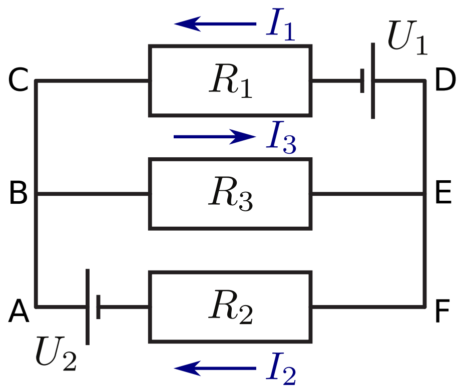
a keresett távolság a földetérés pillanatában pedig

$$x = R\sin\phi + v_x t. \tag{12}$$

Az adatokat behelyettesítve a megoldás:

$$x \approx 15,6\ \mathrm{cm}. \tag{13}$$

3. feladat



Jelölje I_1, I_2 illetve I_3 az R_1, R_2 illetve R_3 ellenálláson átfolyó áramokat! A feladat megoldásához alkalmazzuk a Kirchhoff-törvényeket! Ehhez az áramok irányát önkényesen az ábrán jelölt módon vesszük fel (ha valamelyik áram a valóságban ellentétes irányba folyik akkor a megoldásban negatív eredményt kapunk). A csomóponti törvény az ábrán B-vel jelölt csomópontra kimondva

$$I_3 = I_1 + I_2, \tag{14}$$

míg a huroktörvény az ABEF, illetve BCDE négyszögekre

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 + U_2 = 0 \tag{15a}$$

$$-R_3 I_3 - R_1 I_1 + U_1 = 0. \tag{15b}$$

Felhasználva a feladatban szereplő adatokat és behelyettesítve az (14) egyenletet a fenti két egyenlet így módosul:

$$200\ \Omega \cdot I_2 + 300\ \Omega \cdot I_3 + 12\ \mathrm{V} = 0 \tag{16a}$$

$$-400\ \Omega \cdot I_3 + 100\ \Omega \cdot I_2 + 6\ \mathrm{V} = 0. \tag{16b}$$

A második egyenletet megszorozva 2-vel, majd az eredményt kivonva az első egyenletből azt kapjuk, hogy $1100\ \Omega \cdot I_3 = 0$. Tehát a feladat megoldása:

$$I_3 = 0, \tag{17}$$

azaz a kérdésben szereplő ellenálláson nem folyik át áram.

4. feladat

A feladat általános megoldása a középiskolában nem elvárt felsőbb matematikai ismereteket igényel, de közelítések nélkül ebben az esetben sem megoldható, így mindenképpen szükség van valamilyen közelítő módszer alkalmazására. A feladat konkrét számértékekkel való megoldása esetén sokféle közelítést alkalmazva is el lehet jutni a helyes megoldáshoz, így felsőbb matematikai ismeretek nélkül is megoldható. A következőkben a bonyolultabbtól az egyszerűbb felé haladva különböző megközelítéseket mutatunk be.

A probléma alapegyenlete, amely megadja a t és $t + \Delta t$ időpontok közötti ΔT hőmérsékletváltozást, a következő:

$$\Delta T(t) = \frac{P - Q_p(T(t))r/M}{C(T(t))(m - rt)}\Delta t \tag{18}$$

ahol $P = 15.4$ kJ/s a tűz teljesítménye, $m = 50$ kg a víz kezdeti tömege, t az idő, $r = 0.1$ kg/min a párolgási ráta, $M = 18$ g/mol. Itt rögtön éltünk is azzal a közelítéssel, hogy a víz sűrűsége nem fog változni a folyamat során, így az r ráta időben állandó. Q_p és C a víz párolgáshője, illetve fajhője, amelyek egyaránt függenek a pillanatnyi hőmérséklettől. Ahhoz, hogy megkapjuk a teljes hőmérsékletváltozást, a fenti egyenletben szereplő kis ΔT változásokat kell összedadni. Ez precízen az ún. integrálással végezhető el, de sem $Q_p(t)$ sem $C(t)$ alakja nem ismert analitikusan, csak a táblázatból, ahol viszont csak néhány konkrét hőmérsékletnél szerepelnek ezen függvények értékei. Részletesebb ismeretek hiányában egy kézenfekvő közelítés, ha feltételezzük, hogy két megadott hőmérséklet között ezek a függvények lineárisan változnak, tehát a táblázatban megadott értékek között a $C(t)$ és $Q_p(t)$ függvények egyenesek, az integrált pedig szakaszosan végezzük, amíg el nem érjük a 30 percet. Ez egy elég precíz közelítés, de szükséges hozzá az integrálás ismerete.

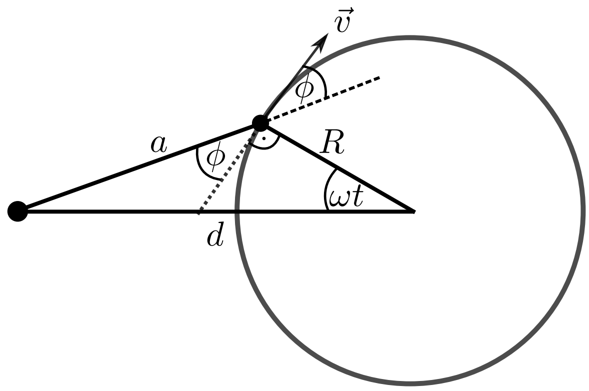
Tovább egyszerűsíthetjük a problémát, ha a lineáris közelítés helyett a táblázat megadott értékei között a két végpont átlagával számolunk az adott szakaszon. Mivel mindkét érték elég lassan változik ezzel nagy hibát nem követünk el. Elemi módszerekkel ekkor még mindig problémát okozhat a folyamatosan csökkenő tömeg figyelembevétele. Ennek elkerülésére megpróbálkozhatunk azzal, hogy alsó és felső korlátokat állítunk az adott hőmérsékleti tartományban eltöltött időkre. Alsó korlát, ha úgy számolunk, hogy az első szakaszon végig 50 l víz van a bográcsban (hiszen ennél biztosan gyorsabban melegszik mert összeségében valamivel kevesebb vizet kell melegíteni), majd a következő szakaszt az így eltelt idővel számolva csökkentett vízmennyiséggel számoljuk továbbb, stb. Egy lehetséges felső korlát, ha az első szakaszon 50 l vízzel számolva kiszámolunk egy Δt időt, ebből meghatározunk egy csökkentett vízmennyiséget, és ezzel újraszámoljuk a szakaszt és az így kapott újabb idővel (és megmaradt tömeggel) számolunk tovább.

A feladat legegyszerűbb megoldása is alsó korlát becslésen alapszik. A lehető legbiztosabb alsó korlát a végső hőmérsékeltre, ha minden lehetséges paraméter értékét a hőmérséklet emelés szempontjából legelőnytelenebb értékre választjuk. Tehát 50 l (illetve a korábban említett közelítést alkalmazva 50 kg) vízet veszünk, a párolgáshőt a lehető legalacsonyabb, a fajhőt pedig a lehető legmagasabb értékre választjuk (ez mindkettő esetében a 100 °C-hoz tartozó érték, hiszen efölé nem mehet a hőmérséklet) és ezeket végig állandónak tekintjük.

$$\Delta T = \frac{P - Q_p(100\text{ °C})r/M}{C(100\text{ °C})m}t_1 = 99.28\text{ °C} \tag{19}$$

Ennél a becslésnél bármelyik fenti módszer magasabb értéket fog adni és ezzel a módszerrel számolva is 100 °C-nál nagyobb értéket kapunk, ezért a fenti összes módszerrel való számolás esetén a válasz, hogy a víz 30 perc után forrásban lesz és 100 °C-os.

5. feladat



A Doppler-effektusra vonatkozó képletben mindig a hangforrás sebességvektorának a felénk eső vetülete jelenik meg. Következésképpen az effektus akkor a legnagyobb amikor ez a vetület maximális, vagyis a körpályának azok pontjaiban amikor a körhöz húzott érintőn helyezkedik el a megfigyelési pont. A körpályán két ilyen pont van, az egyik amikor a hangforrás sebességvektora éppen a megfigyelő felé, a másik pedig amikor éppen tőle elfelé mutat. Amikor a hangforrás közeledik akkor az általunk hallott frekvencia magasabb mint a kibocsátott frekvencia, vagyis $f = \frac{c}{c-v} f_0$. A másik esetben amikor a hangforrás tőlünk távolodik akkor az általunk hallott hang magasabb, frekvenciája $f = \frac{c}{c+v} f_0$. A frekvenciakülönbség a két esetben

$$|f - f_0| = \frac{v}{c-v} f_0 \tag{20}$$

amikor a hangforrás közeledik, illetve

$$|f - f_0| = \frac{v}{c+v} f_0 \tag{21}$$

amikor távolodik. Feltehetjük, hogy a sziréna sebessége kisebb a hangsebességnél, így a két eset közül a különbség akkor nagyobb amikor a sziréna felénk közeledik.

A hallott frekvencia időbeli változásának meghatározásához tekintsük a fenti ábrát. A sziréna a kör mentén konstans $\omega = v/R$ szögsebességel halad körbe. Az ábrán ϕ-vel jelölt szöggel kifejezve a hallott frekvencia

$$f = \frac{c}{c + v\cos\phi} f_0, \tag{22}$$

célunk tehát $\cos\phi$ meghatározása. Felhasználva a szinusz tételt

$$\frac{\sin(\omega t)}{a} = \frac{\sin(\pi/2+\phi)}{d} = \frac{\cos\phi}{d}, \tag{23}$$

ahol a az ωt szöggel szemben lévő oldal nagysága. Ez a koszinusz tétel értelmében

$$a = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos(\omega t)}. \tag{24}$$

Tehát a keresett kifejezés

$$\cos\phi = \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{1+\frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d}\cos(\omega t)}}. \tag{25}$$

A fenti eredményt felhasználva a relatív frekvencia eltérés értékére

$$\frac{|f-f_0|}{f_0} = \frac{v\cos\phi/c}{1+v\cos\phi/c} = \frac{1}{1+\frac{c}{v}\frac{\sqrt{1+\frac{R^2}{d^2}-2\frac{R}{d}\cos(\omega t)}}{\sin(\omega t)}} \tag{26}$$

adódik, ahol $\omega = v/R$. Bár a feladat ezt nem kérte, ábrázolhatjuk a fenti függvényt ωt függvényében, különböző R/d illetve v/c értékekre. Ez látható az alábbi ábrán.