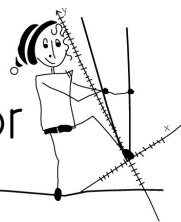


# Matematika feladatsor

11 - 12. osztályosok



1. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc  $4 \times 4$ -es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhettek pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát az összes lehetséges értékre, és mutassátok meg, hogy más tényleg nem lehet.

2. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

3. Legyenek  $a, b$  és  $c$  pozitív valós számok. Mutassátok meg, hogy

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

4. Egy  $n$  tagú baráti társaságnak szervezünk tájfutó versenyt. Összesen  $n$  futamot rendezünk, mindegyikben egymás után indul el az  $n$  versenyző. Szeretnénk azt, hogy bármely versenyző pontosan egyszer induljon az  $1., 2., \dots, n.$  helyekről. Továbbá azt is szeretnénk, hogy bármely két versenyző (pl.:  $A$  és  $B$ ) pontosan kétszer kövesse egymást közvetlenül, méghozzá egyszer  $AB$ , egyszer pedig  $BA$  sorrendben.

- a) Mutassátok meg, hogy  $n = 5$  esetén nem lehet versenyt szervezni a feltételeknek megfelelően.  
b) Mutassátok meg, hogy ha  $n$  páros, akkor viszont meg lehet szervezni.

5. Az  $ABCD$  konvex négyszög  $A$ -nál levő  $60^\circ$ -os szögét az  $AC$  átló felezi, továbbá  $\sphericalangle ACD = 40^\circ$  és  $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ . A négyszög belsejében a  $P$  pont úgy helyezkedik el, hogy  $\sphericalangle PDA = 40^\circ$  és  $\sphericalangle PBA = 10^\circ$ .

- a) Mekkora a  $DPB$  szög?  
b) Bizonyítsátok be, hogy  $P$  az  $AC$  átlóra esik.

**6. Játék:** Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot. A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya egy általuk választott sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány szomszédos CÉL mezőt. Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.
2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyt.
3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

*Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.*