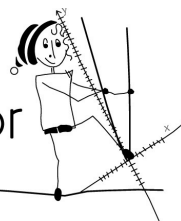


Matematika feladatsor

11 - 12. osztályosok



1. Hat (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számból az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt, összeadjuk őket, és leírjuk ezeket az összegeket. A leírt számok között legfeljebb hány különböző prímszám fordulhat elő?

2. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n pozitív egészek ($n \geq 4$) egy körön úgy, hogy x_i osztja a két szomszédjának összegét, vagyis $k_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i}$ egész minden i -re (ahol $x_0 = x_n$ és $x_{n+1} = x_1$). Legyen $S = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

a) Mutassátok meg, hogy $S \geq 2n$.

b) Keressetek x_1, x_2, \dots, x_n pozitív egészeket, hogy S minél nagyobb legyen.

c) Bizonyítsatok minél jobb felső korlátot S -re.

3. Hat négyzet összterülete 2 egység. Mutassátok meg, hogy elhelyezhetőek átfedés nélkül egy 2×2 -es négyzetben.

4. Adott a síkon véges sok piros, kék és sárga pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Bármely piros háromszögben van kék pont, bármely kék háromszögben van sárga pont, és bármely sárga háromszögben van piros pont.

a) Keressetek minél jobb felső korlátot a pontok számára.

b) Adjatok konstrukciót minél több ponttal.

5. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. A P_b, Q_b, R_b pontok rendre a BC_1, C_1A_1, A_1B szakaszok pontjai úgy, hogy $BP_bQ_bR_b$ paralelogramma. Ugyanígy a P_c, Q_c, R_c pontok rendre a CB_1, B_1A_1, A_1C szakaszok pontjai úgy, hogy $CP_cQ_cR_c$ paralelogramma. A P_bR_b és P_cR_c egyenesek metszéspontja T . Mutassátok meg, hogy $TQ_b = TQ_c$.

6. Játék: Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot. A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya alsó sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábút), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány (nem feltétlenül szomszédos) CÉL mezőt. Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.

2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyt.

3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.