Döntő

2017.
február 11.

# Váltóverseny

## 11-12. osztályosok

D kategória D+ kategória

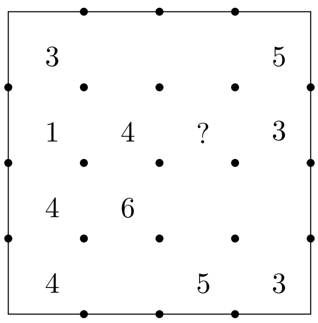
**D-1.** Anna leírta a római számokat 1-től 30-ig növekvő sorrendben. Béla is leírta ugyanezeket a római számokat, de ő ábécé-sorrendben. Hány helyen egyezik meg a két sorrend? (3 pont)

**D-2.** Egy autó 100 kilométeren kétszer annyit fogyaszt, ha 120 km/h-val megy, mint ha 30 km/h-val menne. Ha 120-szal két órát tud menni egy tank benzinnel, akkor 30-cal hány percenként kell megállnia tankolni? (3 pont)

**D-3.** Az Albrecht Dürer Gimnázium 11.D osztályában a fiúk és a lányok közül is tízen-tízen szeretik a matekot. Hányféleképpen alakulhat meg az osztály Dürer-csapata, ha a csapatnak három matekot szerető diákból kell állnia, és kell, hogy legyen benne legalább egy lány. (Más megkötés nincs, és a csapaton belüli sorrend nem számít.) (3 pont)

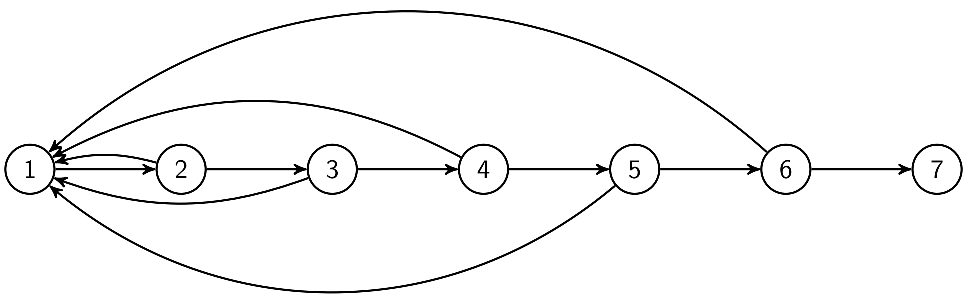
**D-4.** Négy egész számból mind a hatféle páronkénti szorzatot kiszámítottuk. A hat szorzat közül ötnek az értéke: 20, 30, 40, 50, 60. Mennyi a hatodik szorzat értéke? (3 pont)

**D-5.** Az ábrán a Dürer Kreatív Névkitaláló Kft. irodájának alaprajza látható. A pontok oszlopokat jelölnek, melyek segítségével 16 egyforma négyzet alakú mezőre fel lehet osztani az irodát. Minden ilyen mezőben egy ember dolgozik. Néhány szomszédos oszlop közé kelet-nyugati vagy észak-déli irányú falakat is építettek, bár ezeket (az iroda külső falán kívül) az ábrán nem jelöltük. Egy mezőn ülő ember északi, déli, nyugati, illetve keleti irányban látja az összes kollégáját, kivéve ha valahol falat építettek kettőjük közé. Néhány mezőre rá is írtuk, hogy az ott ülő hány munkatársát látja. Milyen számot írhatunk a kérdőjeles mezőre? (4 pont)



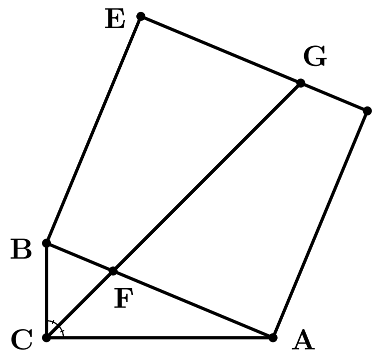

**D-6.** Melyik az a legnagyobb $n$ egész szám, melyre bármilyen pozitív egész $k$ esetén $2016^n$ osztja a $k(k+1)(k+2)\cdots(k+2015)$ szorzatot? (4 pont)

**D-7.** Egy hangya sétál az ábrán. Az 1-es pontból indul, és mindig csak a nyílnak megfelelő irányban halad. Bármelyik vonalon 1 percig tart végigmennie. Ha egy pontba érkezik, és ezelőtt páratlan számú alkalommal járt itt, akkor egyenesen továbbmegy az eggyel nagyobb sorszámú pontba. Ellenben, ha ezelőtt páros számú alkalommal járt itt, akkor visszamegy az 1-es pontba. Kivétel ez alól az 1-es pont, ahonnan mindig továbbmegy a 2-esbe, és a 7-es pont, ahol befejezi a sétáját. Hány percig sétál a hangya? (4 pont)



**D-8.** Egy egyenes henger alakú vödör alapjának területe 450 cm$^2$. A vödörbe valamennyi vizet töltünk, majd ebbe egy téglatestet állítunk, amelynek van 18 cm-es és 20 cm-es éle is, a harmadik élhosszat nem ismerjük. Ha a 18 cm-es él áll függőlegesen, akkor 12 cm a vízszint. Ha a 20 cm-es él áll függőlegesen, akkor 10 cm a vízszint. Hány cm magas a vízszint, ha a harmadik él áll függőlegesen? (4 pont)

**D-9.** Az $ABC$ háromszög $C$ csúcsánál derékszög van. Állítsunk egy $BADE$ négyzetet az átfogóra. Messe a $C$ csúcsnál levő szögfelező $BA$-t $F$-ben és $ED$-t $G$-ben. Ha $CA = 24$ és $CB = 10$, mennyi az $ADGF$ négyszög területe? (5 pont)




**D-10.** Melyik az a legkisebb pozitív egész $k$ szám, melyre teljesül, hogy ha akárhogyan is van megadva véges sok (nem feltétlenül különböző) szám a $[0, 1]$ intervallumból, melyek összege 2017, akkor szét lehet osztani ezeket a számokat $k$ (esetleg üres) csoportba, hogy minden csoportban legfeljebb 1 legyen az összeg? (5 pont)

**D-11.** Melyik az a legnagyobb $n$ egész szám, amelyre igaz, hogy egy szabályos $n$-szög csúcsait ki lehet színezni pirosra és kékre úgy, hogy ne legyen olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek mindhárom csúcsa ugyanolyan színű? (5 pont)

**D-12.** Egy $8 \times 8$-as sakktáblára pakolunk alakú triminókat átfedés nélkül. Mennyi a lehető legkevesebb triminó, amit feltehetünk úgy, hogy többet már ne lehessen feltenni? (5 pont)

**D-13.** Egy $2017 \times 1729$-es táblázat mezőibe kétszer beírtuk 1-től $2017 \cdot 1729$-ig az egész számokat nagyság szerinti sorrendben. Először soronként felülről lefelé és azon belül soronként balról jobbra, másodszor pedig oszloponként balról jobbra és azon belül oszloponként felülről lefelé. Hány mezőbe került ugyanaz a szám a két kitöltés során? (6 pont)

**D-14.** Egy $99 \times 99$-es sakktábla minden mezejében van egy érme, kezdetben írással felfelé. Egy lépésben kiválaszthatunk egy sorban vagy egy oszlopban négy egymás melletti mezőt, majd az azokon lévő négy érmét megfordítjuk. Hány olyan mező van, melyre elérhető véges sok lépésen belül, hogy csak azon az egy mezőn legyen írás, az összes többin pedig fej? (6 pont)

**D-15.** Az $ABC$ háromszögben $C$-nél derékszög van, $AC = 6$, $BC = 8$. Az $AB$ oldal belsején van a $D$ pont felvéve $A$-tól $30/11$ távolságra. A $P$ pont az $ABC$ háromszög körül írt körének $C$-től különböző metszéspontja a $CD$ egyenessel. Mekkora a $CP$ távolság négyzete? (6 pont)

**D-16.** Néhány ember sorban áll a buszmegállóban. Öt egymás mögött állót sorban megkérdeztünk, és ezeket mondták:

1. Mögöttem kétszer annyi lány áll, mint előttem.
2. Mögöttem ugyanannyi lány áll, mint amennyi fiú előttem.
3. A közvetlen mögöttem álló két ember különböző nemű.
4. Mögöttem ugyanannyi fiú áll, mint amennyi lány előttem.
5. Előttem és utánam ugyanannyi fiú áll.

Legfeljebb hányan állhatnak a buszmegállóban? (6 pont)

**D-17.** Egy egyenes folyó két partján található néhány település. Az egyik oldalon 11 van sorban a parton, míg a másik oldalon 7. Szeretnénk egyenes hidakat építeni, melyek egy-egy települést kötnek össze a két partról. A hidak nem keresztezhetik egymást, és el kell tudnunk jutni bármelyik településből bármelyik másikba csak ezen hidak segítségével. A települések között csak hidakon közlekedhetünk. Hányféle elrendezésben építhetjük meg a hidakat? (7 pont)

**D-18.** Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ valós számok, melyekre $0 \leq x_i \leq i$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$. Ekkor mi az alábbi kifejezés maximális értéke?

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{10}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots x_{10}x_1x_2)$$

(7 pont)

**D-19.** 2010-en ülnek egy kerek asztal körül. Andrásnak adunk egy cukrot. Majd elindulunk és az Andrástól jobbra ülő 1. embernek is adunk egy cukrot, majd az $(1+2)$.-nak is adunk egy cukrot, majd az $(1+2+3)$.-nak is adunk egy cukrot, ..., végül az $(1+2+\cdots+2009)$. embernek is adunk egy cukrot. Hányan kaptak összesen cukrot? (7 pont)

**D-20.** Hány olyan $0 < n < 3^8$ egész szám van, melyre teljesül, hogy a $0 \leq k \leq \frac{n}{3}$ egész számok közül pontosan 216 olyan van, melyre $\frac{n!}{(n-3k)! \cdot k! \cdot 3^{k+1}}$ nem egész? (7 pont)

**Megoldókulcs:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D-1. | 15 | D-5. | 3 | D-9. | 338 | D-13. | 289 | D-17. | 8008 |
| D-2. | 960 | D-6. | 334 | D-10. | 4033 | D-14. | 576 | D-18. | 2379 |
| D-3. | 1020 | D-7. | 94 | D-11. | 8 | D-15. | 80 | D-19. | 408 |
| D-4. | 24 | D-8. | 16 | D-12. | 11 | D-16. | 22 | D-20. | 420 |