A C, C+, D és D+ kategória játékának megoldása (matematika, 9-12. osztályosok)

1. Az Albrecht Dürer Biokémiai Kutatólaboratóriumban fejlesztették ki a következő játékot.

C, D: A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya egy általuk választott sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány szomszédos CÉL mezőt.

C+, D+: A játék kezdetén a szervezők a kapott pálya alsó sorának néhány mezőjére tesznek egy-egy baktériumot (bábut), a legfelső sorban pedig kijelölnek néhány (nem feltétlenül szomszédos) CÉL mezőt.

Ezután a Támadó kezd, majd felváltva lépnek a Védekezővel. A Támadó egy körben az alábbi háromféle lépés egyikét választhatja:

1. Egy mezőn lévő összes baktériummal egyszerre balra vagy jobbra lép egyet.
2. Egyetlen baktériummal előre ugrik két sornyit.
3. Kijelöl egy mezőt, ahol végbemegy a sejtosztódás. Ekkor az ezen mezőn lévő összes baktérium osztódik: és mindegyikből egy-egy példány balra előre, ill. jobbra előre lép.

A Védekező minden körben eltávolíthat egy baktériumot a pályáról. A Támadó akkor nyer, ha legalább egy baktérium bejut valamelyik CÉL mezőbe; a Védekező pedig akkor, ha az összes baktérium eltűnt a pályáról. Ha egy baktérium a pályán kívülre kerül egy lépéssel, akkor eltávolítottnak minősül.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a pálya ismeretében, hogy a Támadó vagy a Védekező bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Először megvizsgáljuk a C és D kategória játékát, és utána, mint ennek általánosítását a C+ és D+ játékát.

A kiosztott pályákon minden kategóriában 9 sor volt. A páratlanadik sorok eggyel több mezőből álltak, mint a párosadikok. A C és D játék alsó sorában 11 mező volt, a C+ és D+ játékában 17. A megoldás szempontjából ezek az adatok lényegtelenek, általánosan fogjuk megvizsgálni, ám az egyszerűség kedvéért az eggyel több mezőből álló sorokat nevezzük majd páratlannak.

Lemma. *A 2. lépésre szinte soha nincs szükség. Egyetlen kivétel, ha a pálya páratlan sorból áll, és a felső sorban az egyik szélső mezőn van egy cél mező, melyre a kettővel lejjebbi sorból akarunk ugrani.*

Bizonyítás. Ha a Védekező mindig leszedi azt a bábut, amely így ugrott, akkor nem jár rosszabbul, mintha ez az egész nem történt volna meg. Ezt egyedül akkor nem teheti meg, ha a bábu így bejutott egy célba, de mindjárt látjuk, hogy ez a fent részletezett eseten kívül egyébként is elkerülhetetlen lenne.

A Támadónak pedig általában megéri két osztódással felváltani az ugrást. Az első duplázás után a Védekező legfeljebb egyik példányt szedheti le, a másikkal a következő körben tud újra osztódni, így a Támadó második köre után biztosan van egy bábu azon a mezőn, ahova ugorhatott volna, de cserébe a táblán összesen több bábu van, így rosszabbul biztosan nem járt. Ezt egyedül akkor nem teheti meg, ha egy páratlan oszlop szélén szeretett volna először osztódni (mert ekkor csak egy bábut kap kettő helyett), ez pedig épp a fent említett kivételes esett. □

Erra a lemmára csak azért volt szükség, hogy elég legyen a maradék két lépéssel foglalkozni a továbbiakban.

		C	A	A	A	A	C		
			C	B	B	B	C		
			C	B	B	C			
				C	B	C			
				C	C				
					C				

Az ábrán A-val jelölt mezők lesznek a célok (most éppen 4 darab). Ha itt van bábu, nyilván nyer a Támadó.

Az ábra betűzése értelemszerűen általánosítható tetszőleges számú célra, a bizonyításból látszódni fog az is, hogyan. Szerencsére a lemma kivételes esete nem fogja elrontani a „piramisunka”.

1. Állítás. *Ha a Védekező köre után van bábu B jelzésű mezőn, akkor a Támadó onnan tud nyerni.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ez az állapot fenntartható, vagyis ekkor minden további kör végén is lesz B (vagy A) mezőn bábu. A stratégia egyszerű: duplázunk. Ekkor mindkét példány B (vagy A) mezőre kerül, ebből legfeljebb egyet szedhet le a Védekező. A másik pedig eggyel feljebb került, így véges sok lépésen belül A-ra fog lépni. □

2. Állítás. *Ha a Védekező köre után van bábu C jelzésű mezőn, akkor a Támadó onnan tud nyerni.*

Bizonyítás. Hasonlóan ez az állapot is fenntartható. Duplázunk, egyik C-be kerül, másik B-be (vagy A-ba). Ha a B-t hagyja meg a Védekező, az 1. állítás miatt készen vagyunk, ha a C-t, akkor C-n maradunk, de feljebb. Az utolsó előtti C-nél viszont a duplázással már A-ba lépünk, így nyer a Támadó. Ha a legfelső C-n marad egy bábu, akkor pedig eltolással nyer a Támadó. □

Ezzel beláttuk, hogy ha kezdetben van a betűs (A, B, C) mezők egyikén bábu, akkor nyerhet a Támadó.

Most pedig belátjuk, hogy ha ezen betűs mezők egyikén sincs bábu, akkor a Védekezőnek van nyerő stratégiája.

2	1	C	A	A	A	A	C	6	
3	2	1	C	B	B	B	C	6	7
3	2	1	C	B	B	C	6	7	
4	3	2	1	C	B	C	6	7	8
4	3	2	1	C	C	6	7	8	
5	4	3	2	1	C	6	7	8	9

Az ábrán az azonos számokkal ellátott mezőket nevezzük „utaknak”.

Egy út egy helyen metszi a startvonalat, így kezdetben legfeljebb egy bábu van rajta. Ennél többet nem is fogunk engedni rá.

Ha a Támadó osztódik, akkor azt a bábut tartjuk meg, amelyik nem hagyta el az útját, vagyis ugyanolyan számú mezőre lépett. Ha pedig nem osztódik, hanem oldalra lép egy bábuval (akármelyik irányba is), akkor is leszedjük. A harmadik fajta lépéssel, mint láttuk, fölösleges foglalkoznunk, de azért megjegyzhetjük, hogy az úgy lépő bábut szintén leszedjük.

Ezzel a stratégiával fenntartható, hogy minden úton legfeljebb egy bábu maradjon.

Kezdetben nem volt nyerő (A, B, C) mezőn bábu, az utakon pedig monoton csökken a bábuk száma (a Védekező köre után), az utak felső mezőin pedig nem tud már kettéosztódni, így előbb-utóbb elfogynak a bábuk, és a Védekező nyer.

Megjegyzés: A stratégia részletezése során ugyan kimondatlanul, de beláttuk azt is, hogy ha kezdetben mindegyik start mezőn legfeljebb egy bábu volt, akkor a Védekező fenn tudja tartani azt, hogy minden mezőn legfeljebb egy bábu van a saját köre után. Ez egy kulcsgondolat, mely a feladattal való foglalkozás közben természetesen előkerül, ezért is tartjuk fontosnak külön kiemelni.

Most vizsgáljuk meg a C+ és D+ játékát.

Az A jelű mezők megint a cél mezők lesznek, ám az előző bizonyítás B és C mezőit is B-vel jelöljük. Szabad mezőnek fogjuk hívni a pálya felső sorának nem betűzött mezőit, illetve a páratlanadik sorok szélső mezőit. Az alsó sorban lévő számok egy-egy start mezőn lévő bábut jelölnek, és az egyszerűség kedvéért balról jobbra egyesével beszámozzuk őket. A belőlük kiinduló „utakat” úgy kapjuk, hogy mindig jobbra-fel, vagy balra-fel lépünk, és összességében úgy vezetjük, hogy egymástól diszjunktak legyenek, ne érintsenek betűs mezőt és egy-egy szabad mezőbe vezessenek. Például, ahogy ezen az ábrán is látszik:

	2	B	A	A	B	3	4	B	A	B	5	B	A	B	6	7	
		2	B	B	B	3		4	B	B	5		B	B	6	7	
		2	B	B		3		4	B	5			B	6	7		
			2	B		3		4		5				6	7		
1			2		3			4		5			6	7			
	1			2		3		4		5			6	7			
	1			2	3			4		5		6	7				
		1			2	3		4		5		6	7				
		1			**2**	**3**		**4**		**5**	**6**	**7**					

A fő állításunk az, hogy ha lehet ilyen pályákat készíteni, akkor a Védekezőnek van nyerő stratégiája, ha nem, akkor a Támadónak. Ezt belátjuk, és megmutatjuk, hogyan lehet eldönteni, hogy léteznek-e ilyen pályák. Közben természetesen megadjuk a nyerő stratégiákat is.

Először megmutatjuk, hogy ha vannak ilyen utak, akkor a Védekezőnek van nyerő stratégiája. Ez hasonlóan megy, mint a sima játékban. Ha a Támadó osztódik, akkor azt tartjuk meg, amelyik az úton maradt. Ha oldalra lép, vagy ugrik, akkor pedig levesszük az adott bábut. Így a Védekező köre végén csak úton lehet bábu, mindegyiken legfeljebb egy. Tehát a következő körben a Támadó nem tud A mezőre lépni (és ezzel nyerni), mert oda csak akkor tudna, ha lenne a Védekező köre után B-n bábuja. Tehát a Támadó sosem nyerhet, ám véges sok körön belül véget ér a játék. (Hiszen az utak tetején már nem tud két példánnyá osztódni, így levehetjük.)

Most nézzük meg, hogy mi van akkor, ha nincsenek ilyen utak. Azt állítjuk, hogy ebben az esetben van néhány (mondjuk k darab) start mező, hogy a róluk együttesen elérhető szabad mezők száma kevesebb, mint k. Sőt, ennél többet is tudunk mondani, ezek a start mezők „szomszédosak" abban az értelemben, hogy egymást követő számmal vannak ellátva, illetve van olyan kiválasztás, ahol k start mezőből pontosan $k-1$ szabad mező érhető el.

Elérhetőség alatt természetesen azt értjük, hogy az adott start mezőből balra-fel illetve jobbra-fel lépkedésekkel elérhető egy mező. Az adott start mezőhöz tartozó összes ilyen mező halmazát könnyű megkapni. Indítsunk el belőle egy végi balra-fel és egy végig jobbra-fel utat, és az összes mező, mely e kettő között van, az elérhető.

A következő gondolat egy kicsit komolyabb gráfelméletet használ, de utána megmutatjuk, hogy enélkül is meg lehet oldani a feladatot. Azért mutatjuk meg, mert a játék mélyén valahol mégiscsak ez a szép tétel bújik meg, és így egy kicsit jobban megérthetjük.

Vegyük fel azt a páros gráfot, ahol a megadott start mezők az egyik színosztály, a szabad mezők pedig a másik, és két csúcs akkor van összekötve, ha a start mezőből elérhető a szabad mező. A Kőnig-Hall-tétel értelmében ebben a gráfban vagy van egy start mezőket fedő párosítás, vagy van néhány (mondjuk k) start mező, akikből az együttesen elérhető mezők száma kevesebb, mint k. Ha van párosítás, akkor könnyű azokból utakat csinálni, és ekkor, mint láttuk, a Védekező nyer. Most adunk is egy egyszerű módszert az utak megtalálására (melyre a tétel ismerete nélkül is rá lehet jönni), melynek segítségével még a másik esetben is megtalálhatjuk a k mezőt.

Az első fázisban vegyük az 1-es start mezőt, és vezessünk utatt a legbalrább lévő nem foglalt szabad mezőbe. Nem foglalt szabad mező alatt olyan szabad mezőt értünk, melybe még nem vezettünk utat (az első esetén még nyilván minden szabad mező nem foglalt). Ezután mindig vesszük a legkisebb sorszámú start mezőt, és vezetünk egy utat az onnan elérhető legbalrább lévő nem foglalt szabad mezőbe. Mint láttuk, hogy ha ezt meg tudjuk tenni, akkor a Védekező nyer, minket most az érdekel, hogy mikor nem tudjuk megtenni.

Ekkor lesz egy első mező (mondjuk a j.), ahonnan nincs nem foglalt szabad elérhető mező. Ez lesz a kiválasztott k mezőnk közül az utolsó. Most keressük meg az elsőt, ez a második fázis. Ehhez nagyjából ugyanezt a módszert csináljuk meg, csak visszafelé. Elfelejtjük az első fázis útjait, majd a j. mezőből felvesszük a legjobbrább lévő nem foglalt szabad mezőben végződő utat, majd a $(j-1)$.-ből, és így tovább. Ekkor szükségképpen minden út (a szabad mezőket tekintve) eggyel balrább végződik, mint az első fázisban. Emiatt lesz egy első olyan mező (mondjuk az i.), ahonnan már nem tudunk utat indítani nem foglalt szabad mezőbe. (Különben elérnénk az 1. mezőt, akinek így szintén tudtunk balrább végződő utat adni, de ez ellentmond az első út választásának az első fázisban.)

Ekkor az i-től j-ig tartó start mezők lesznek az általunk kiválasztott mezők ($k = j - i + 1$ darab), melyekből a fentiek alapján pont $k-1$ mező érhető el. (De nekünk elég lesz annyi is, hogy kevesebb, mint k.) Az is könnyen látható, hogy ezek a szabad mezők mind a felső sorban lesznek.

A továbbiakban csak ezeken lévő bábukra koncentrálunk (a többiről teljesen megfeledkezünk), és megmutatjuk, hogy ezekkel tud nyerni a Támadó. A stratégia egyszerű: mindig osztódunk ezek egyikével. Ekkor a Védekező legfeljebb egyet tud levenni, tehát mindig marad legalább k bábunk, melyek egyre feljebb kerülnek. Ha a Védekező köre végén van bábunk betűs mezőben, akkor a CD-játéknál ismertett módon tudunk nyerni.

Ha egyszer sincs, és többet nem tudunk osztódni, akkor a felső sorban van legalább k bábunk a (legfeljebb) $k-1$ mezőn. Most nézzük a felső sor szabad mezői alkotta szomszédos csoportokat, azaz két betűs mező közötti mezőket. Nyilván van olyan csoport, ami kevesebb mezőből áll (mondjuk l), mint ahány bábu összesen rajta van, különben együtt se lennének kevesebben.

Egy ilyen csoportban vegyük mindig a legbalrább lévő bábukat, és azokat toljuk jobbra. Ekkor l lépés után, a Védekező körének végén, még mindig van legalább 1 bábunk, és az már betűs mezőn kell, hogy álljon, így készen vagyunk, nyert a Támadó.