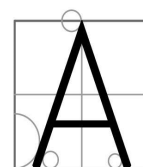
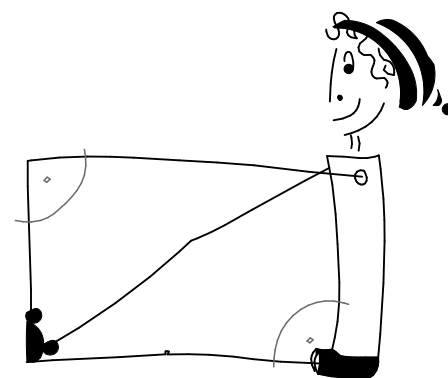


kategória



kategória



# MATEMATIKA

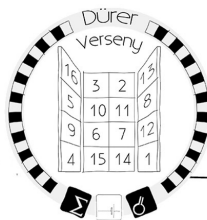
## Feladatok, megoldások és eredmények

Dürer Matematika-, Fizika- és Kémiaverseny

2017

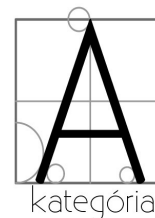
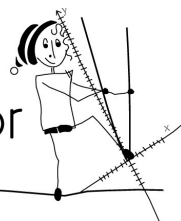






# Matematika feladatsor

## 5 - 6. osztályosok



**1. a)** Szent György átlövagolt a hétfejű sárkányok földjén. Minden sárkánynak levágta egy vagy két fejét, így csak ötféjű és hatfejű sárkányok maradtak. Lehetséges-e, hogy összesen 123 sárkányfej maradt a helyén? Ha lehetséges, adjatok egy példát.

**b)** Visszafelé menet Szent György még egy fejet levágott az összes ötféjű sárkányról, így kizárólag hatfejű és négyfejű sárkányok maradtak. Lehetséges-e, hogy a visszaút után már csak 111 sárkányfej maradt a helyén?

**2. a)** Adjatok meg egy olyan pozitív egész számot, amelynek számjegyeinek összege is 10 és a számjegyeinek szorzata is 10.

**b)** Hány ilyen szám van?

**3.** A Futrinka utca egyik oldalán összesen öt ház áll, lakóik: Buksi, Morzsa, Cicamica, Sompolygi és Kacsa Karola. Tudjuk, hogy Kacsa Karola valamelyik szélső házban lakik, Cicamica háza pedig a második az utca végéről számolva. Cicamica és Sompolygi nem laknak egymás mellett, mert haragszanak egymásra. Buksi és Morzsa jó barátok, ezért szomszédok, továbbá Morzsa Kacsa Karolához menve útközben meg tudja nézni, hogy Buksi otthon van-e. Kinek ki(k) a szomszédai?

**4.** Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc  $4 \times 4$ -es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhettek pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát minél többféle értékre. Ha úgy gondoljátok, hogy már az összes lehetséges értéket megtaláltátok, akkor próbáljátok meg indokolni is, hogy más érték miért nem lehetséges.

**5. a)** El lehet-e helyezni egy sakktáblán 3 futót és 3 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

**b)** El lehet-e helyezni egy sakktáblán 4 futót és 4 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

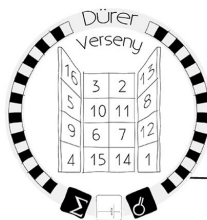
**c)** El lehet-e helyezni egy sakktáblán 5 futót és 5 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

**6. (Játék)** A játék kezdetén a szervezők néhány, de legfeljebb 6 korongot letesznek az asztalra, mindegyiket a piros vagy a kék felével felfelé. A soron következő játékos összesen négyfélét léphet:

- 1 vagy 2 kék korongot elvehet az asztalról.
- 1 vagy 2 piros korongot átfordíthat kékké.

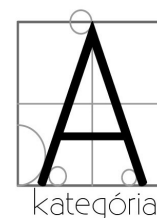
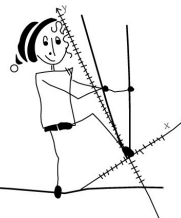
Aki már nem tud lépni, az elveszíti a játékot.

*Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.*



# Matek megoldókulcs

## 5 - 6. osztályosok



**1. a)** Szent György átlövagolt a hétfejű sárkányok földjén. Minden sárkánynak levágta egy vagy két fejét, így csak ötfejű és hatfejű sárkányok maradtak. Lehetséges-e, hogy összesen 123 sárkányfej maradt a helyén? Ha lehetséges, adjatok egy példát.

**b)** Visszafelé menet Szent György még egy fejet levágott az összes ötfejű sárkányról, így kizárólag hatfejű és négyfejű sárkányok maradtak. Lehetséges-e, hogy a visszaút után már csak 111 sárkányfej maradt a helyén?

**Megoldás: a)** Ha 24 hétfejű sárkány volt kezdetben, akkor Szent György lovag elérhette, hogy összesen 123 fej maradjon a helyén, mégpedig a következő módon. Három hétfejű sárkánynak vágta le egy és 21 sárkánynak vágta le két fejét átutazás közben, így a maradék fejek száma  $3 \cdot 6 + 21 \cdot 5 = 123$ .

**b)** Páros számok összegeként nem állítható elő páratlan szám, ezért nem lehetséges, hogy a visszaút után már csak 111 sárkányfej maradt a helyén.

**2. a)** Adjatok meg egy olyan pozitív egész számot, amelynek számjegyeinek összege is 10 és a számjegyeinek szorzata is 10.

**b)** Hány ilyen szám van?

**Megoldás: a)** Ilyen pozitív egész szám például a 11125.

**b)** A 10 prímtényezőző felbontása  $2 \cdot 5$ , tehát egy szám számjegyeinek szorzata akkor lehet 10, ha tartalmaz pontosan egy darab 2-es és egy darab 5-ös számjegyet. Továbbá még 1-es számjegyek lehetnek a számjegyek között. Az összegre vonatkozó feltétel miatt  $10 - (2+5) = 3$  darab 1-es számjegyet kell még tartalmaznia a keresett számoknak. Három darab 1-es, egy darab 2-es és egy darab 5-ös számjegyből 20 különböző ötjegyű szám állítható elő: az 5-ös öt helyre kerülhet, ezután a 2-es négy helyre, és a szabadon maradó helyeket feltöltjük egyesekkel.

**3.** A Futrinka utca egyik oldalán összesen öt ház áll, lakóik: Buksi, Morzsa, Cicamica, Sompolygi és Kacska Karola. Tudjuk, hogy Kacska Karola valamelyik szélső házban lakik, Cicamica háza pedig a második az utca végéről számolva. Cicamica és Sompolygi nem laknak egymás mellett, mert haragszanak egymásra. Buksi és Morzsa jó barátok, ezért szomszédok, továbbá Morzsa Kacska Karolához menve útközben meg tudja nézni, hogy Buksi otthon van-e. Kinek ki(k) a szomszédai?

**Megoldás:** Számozzuk meg Kacska Karola lakóhelyétől a házakat. Cicamica házána sorszáma így csak 2-es vagy 4-es lehet. Elsőként nézzük meg, hogy Cicamica háza lehet-e a 4-es. Ekkor Sompolygi nem lakhat sem az 5-ös, sem a 3-as szám alatt, mert tudjuk, hogy nem szomszédja Cicamicának, így ő a 2-es sorszám alatt kell lakjon. Ebből következően Buksi és Morzsa a 3-as és az 5-ös szám alatt kell lakjon, de ez nem lehet, mert tudjuk, hogy szomszédok. Azaz Cicamica háza csak a 2-es számú lehet. Ekkor Sompolygi háza csak az 5-ös lehet, mert ha a 4-esben lakna, akkor megint nem lehetne igaz, hogy Buksi és Morzsa szomszédok. Így Buksi és Morzsa lakik a 3-as és a 4-es szám alatt. Mivel Morzsa Kacska Karolához menet elmegy Buksi háza előtt, így Morzsa lakik a 4-es, Buksi pedig a 3-as számú házban.

Tehát Kacska Karola szomszédja Cicamica, Cicamica szomszédjai Kacska Karola és Buksi. Buksi mellett lakik Cicamica és Morzsa, Morzsa mellett Buksi és Sompolygi és Sompolygi egyetlen szomszédja Morzsa.

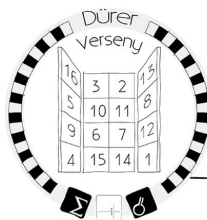
**4.** Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc  $4 \times 4$ -es bővös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhettek pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát minél többféle értékre. Ha úgy gondoljátok, hogy már az összes lehetséges értéket megtaláltátok, akkor próbáljátok meg indokolni is, hogy más érték miért nem lehetséges.

**Megoldás:** A bal felső 4 kis négyzet között biztosan van piros, ugyanis vagy a sarok piros, vagy a két szomszédja közül valamelyik. Ugyanez igaz a bal alsó, a jobb felső és a jobb alsó 4 kis négyzetre. Ez a négy csoport csupa különböző négyzetet tartalmaz, tehát van legalább 4 piros négyzet.

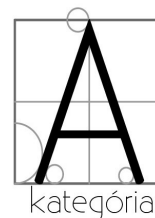
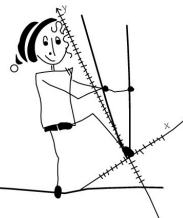
Természetesen ez elmondható a kék és zöld színre is. Ezért nem lehet 8-nál több piros négyzet, mert ekkor az összesen 16 négyzetből legfeljebb 7 maradna a kékeknek és a zöldeknek, viszont mindkettőből legalább 4-nek kellene lennie.

Tehát a piros négyzetek lehetséges száma 4, 5, 6, 7 vagy 8. Ezek mindegyike meg is valósítható, például a következő módokon.



# Matek megoldókulcs

## 5 - 6. osztályosok



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| k | p | z | k |
| z | k | k | p |
| p | k | k | z |
| k | z | p | k |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| k | p | z | k |
| z | k | k | p |
| p | p | k | z |
| k | z | p | k |

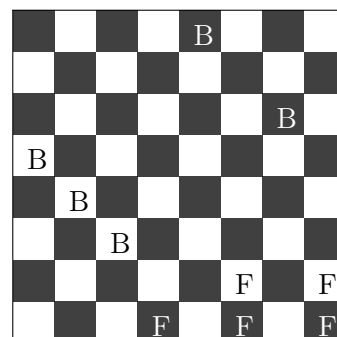
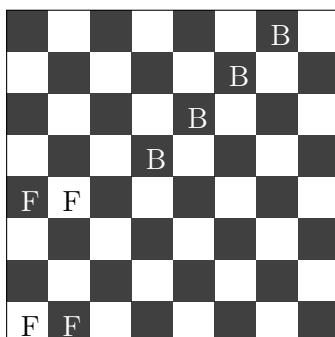
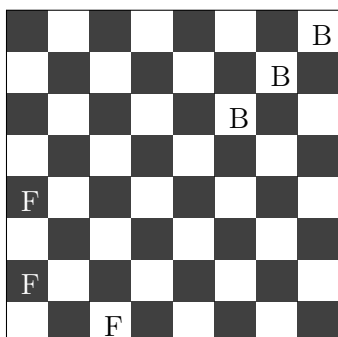
|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| k | p | z | k |
| z | k | p | p |
| p | p | k | z |
| k | z | p | k |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| p | k | z | p |
| z | p | p | k |
| k | k | p | z |
| p | z | k | p |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| p | k | z | p |
| z | p | p | k |
| k | p | p | z |
| p | z | k | p |

5. a) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 3 futót és 3 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?  
 b) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 4 futót és 4 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?  
 c) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 5 futót és 5 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

**Megoldás:** 5-5, és így természetesen 4-4 illetve 3-3 bábut is el lehet helyezni, például az alábbi ábrákon látható módon (a futókat F, a bástyákat B jelöli).



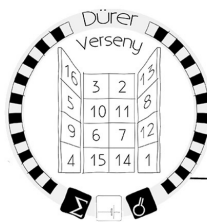
6. **(Játék)** A játék kezdetén a szervezők néhány, de legfeljebb 6 korongot letesznek az asztalra, mindegyiket a piros vagy a kék felével felfelé. A soron következő játékos összesen négyfelét léphet:

- 1 vagy 2 kék korongot elvehet az asztalról.
- 1 vagy 2 piros korongot átfordíthat kékké.

Aki már nem tud lépni, az elveszíti a játékot.

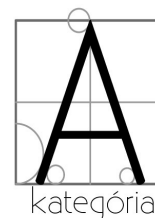
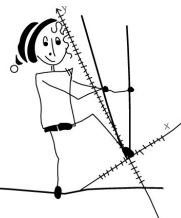
**Megoldás:** Nyerő stratégia, hogyha mindig úgy lépsz, hogy a lépésed után a kék korongok száma 3-mal osztható, azaz 0, 3 vagy 6 legyen. Speciálisan, ha a játék kezdetén ez teljesül, akkor a másodiknak van nyerő stratégiája, ellenkező esetben a kezdőnek. A stratégia helyességének bizonyításához három dolgot kell belátni: a játék biztosan véget ér; nyerő állásból nem lehet nyerő állásba lépni; valamint nem nyerő állásból biztosan lehet nyerő állásba lépni.

Egyrészt a játék biztosan befejeződik, hiszen ha a piros korongok 2-t, a kék korongok 1-et érnek, akkor minden lépésben legalább eggyel csökken a korongok összértéke. Másrészt ha a kék korongok száma 3-mal osztható, akkor a másik vagy nem tud lépni, és így veszített, vagy a négy lépés bármelyikét lépi, és így a kék korongok száma nem lesz 3-mal osztható: eggyel vagy kettővel csökken vagy növekszik. Harmadrészt ha a kék korongok száma nem osztható 3-mal (és a nyerő stratégiát követve mindig csak ilyen helyzetben lépünk), akkor tudunk úgy lépni, hogy 3-mal osztható legyen: elveszünk 1 kék korongot ha a kék korongok száma 3-mal osztva 1 maradékot ad, vagy elveszünk 2 kék korongot, ha a kék korongok száma 3-mal osztva 2 maradékot ad.



# Váltóverseny

## 5 - 6. osztályosok



**A-1.** Anna leírta a római számokat 1-től 30-ig növekvő sorrendben. Béla is leírta ugyanezeket a római számokat, de ő ábécé-sorrendben. Hány helyen egyezik meg a két sorrend? (3 pont)

**A-2.** Elhatároztam, hogy megmértem, hogy milyen messze lakom az iskolától. Egyenlő lépésekkel mentem reggel, az út első felében kettesével, a második felében azonban hármassával számoltam a lépéseket. 250-nel több kettős lépést számoltam, mint hármast. Hány lépésre lakom az iskolától? (3 pont)

**A-3.** Aladár elfelejtette a böröndjének kódját, csak ezekre a számjegyekre emlékszik belőle:  $\overline{32x45y}$ . Az még eszébe jutott, hogy a szám osztható volt 72-vel. Mi volt a kód utolsó 4 számjegye? (3 pont)

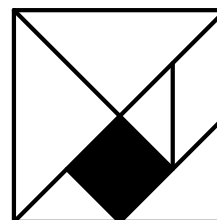
**A-4.** Az Albrecht Dürer Gimnázium 5.D osztályában a fiúk közül hárman (Bálint, Gábor, Dani), a lányok közül ketten (Zsuzsi és Magdi) szeretik a matekot. Hányféleképpen alakulhat meg az osztály Dürer-csapata, ha a csapatnak három matekot szerető diákból kell állnia és kell, hogy legyen benne legalább egy lány (más megkötés nincs és a csapaton belüli sorrend nem számít)? (3 pont)

**A-5.** Egy 30 fős osztály az osztálykirándulás alkalmával elment palacsintázni. Mindenki legalább egy palacsintát rendelt az alábbi háromféle közül: kakaós, lekváros és túrós. 14-en kértek túrósat, 15-en kakaósat és 9-en lekvárosat. Pontosan kétféle palacsintát 6 diák evett. Hányan ettek mindhárom fajta palacsintából? (4 pont)

**A-6.** Egy juhásznak van egy nyája. Azt vette észre, hogy ha hatosával állítja sorokba őket, akkor 5, ha ötösével, akkor 4, ha négyesével, akkor 3, ha hármassával, akkor 2 bárány marad ki. Adjátok meg azt a legkisebb számot, ahány bárány lehet a juhásznak. (4 pont)

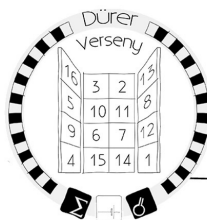
**A-7.** Melyik az a háromjegyű szám, amelyet számjegyei összegével akár növelünk, akár csökkentünk, csupa azonos számjegyből álló számot kapunk? (4 pont)

**A-8.** Egy négyzetet az ábrán látható módon feldaraboltunk: minden egyenes vagy a nagy négyzet oldalaival, vagy annak átlóival párhuzamos. Hány négyzetcentiméter a nagy négyzet területe, ha a fekete színűé  $8 \text{ cm}^2$ ? (4 pont)



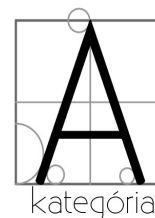
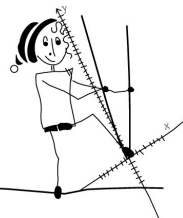
**A-9.** Egy sorozat első eleme 76 és minden további elemet a következő szabály szerint kapunk: ha az utolsó tag páros volt, akkor azt elosztjuk kettővel, ha pedig páratlan, akkor megszorozzuk öttel és hozzáadunk egyet. Mi az így kapott sorozat 2017. eleme? (5 pont)

**A-10.** Kovács nagypapa, akinek életkora 50 és 70 esztendő közé esik, a következőt mesélte barátainak: „Mindegyik gyerekemnek annyi gyereke van, mint ahány testvére; gyermekeim és unokáim száma pedig együttvéve annyi, mint élet éveimnek száma.” Hány éves a nagypapa? (5 pont)

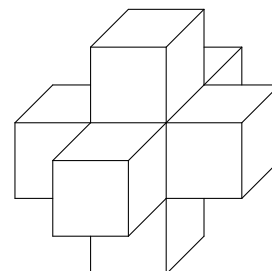


# Váltóverseny

## 5 - 6. osztályosok

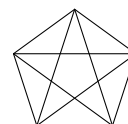


**A-11.** Egy kocka minden oldalára ráragasztottunk egy ugyanakkora kockát. Mekkora az így létrejött test felszíne négyzetdeciméterben, ha a térfogata  $7 \text{ dm}^3$ ? (5 pont)



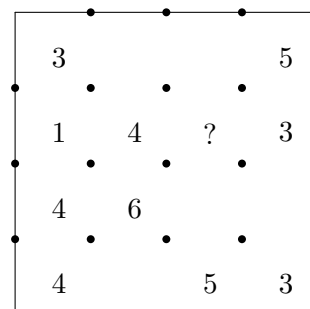
**A-12.** Négy egész számból mind a hatféle páronkénti szorzatot kiszámítottuk. A hat szorzat közül ötnek az értéke: 20, 30, 40, 50, 60. Mennyi a hatodik szorzat értéke? (5 pont)

**A-13.** Hány háromszöget határolnak az ábra vonalai?



(6 pont)

**A-14.** Az ábrán a Dürer Kreatív Névkitaláló Kft. irodájának alaprajza látható. A pontok oszlopokat jelölnek, melyek segítségével 16 egyforma négyzet alakú mezőre fel lehet osztani az irodát. Minden ilyen mezőben egy ember dolgozik. Néhány szomszédos oszlop közé kelet-nyugati vagy észak-déli irányú falakat is építettek, bár ezeket (az iroda külső falán kívül) az ábrán nem jelöltük. Egy mezőn ülő ember északi, déli, nyugati, illetve keleti irányban látja az összes kollégáját, kivéve ha valahol falat építettek kettőjük közé. Néhány mezőre rá is írtuk, hogy az ott ülő hány munkatársát látja. Milyen számot írhatunk a kérdőjeles mezőre? (6 pont)



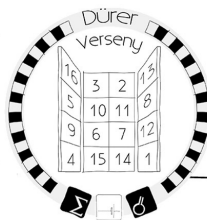
**A-15.** Balázs apukája a gyerekei kérésére a kertben a téglalap alakú homokozót négyzet alakúra építi át. A homokozó eredeti oldalainak mérete: 3,6 m és 4,8 m. Apukájuk úgy alakítja át négyzetté, hogy az egyik oldalát kétszer annyival változtatja meg, mint a másikat. Az így létrehozhatóak közül a legrövidebb oldalú négyzetet választotta.

Hány köbdeciméter homokot kell hozatnia, ha 40 cm mélységű homokréteget szeretne, és a régi homokot mind lecserélik? (6 pont)

**A-16.** Albrechtke téglalap alakú szobáját  $68 \times 119 = 8092$  négyzet alakú járólappal fedték le. Albrechtke megrajzolta a padlón a szobája egyik átlóját. Hány járólapon megy keresztül ez a vonal, ha azok a járólapok nem számítanak, amelyek csak egy pontban érintkeznek vele? (6 pont)

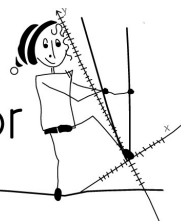
**Megoldókulcs:**

|      |      |      |     |       |    |       |      |
|------|------|------|-----|-------|----|-------|------|
| A-1. | 15   | A-5. | 1   | A-9.  | 6  | A-13. | 35   |
| A-2. | 3000 | A-6. | 59  | A-10. | 64 | A-14. | 3    |
| A-3. | 7456 | A-7. | 105 | A-11. | 30 | A-15. | 2304 |
| A-4. | 9    | A-8. | 64  | A-12. | 24 | A-16. | 170  |



# Matematika feladatsor

7 - 8. osztályosok

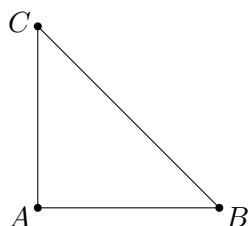


1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek számjegyeinek összege is 10 és a számjegyeinek szorzata is 10?

2. A kishitűek és nagyotmondók szigetén minden ember kishitű vagy nagyotmondó. Egyszer egy külföldi tévedt a szigetre, egy tízfős társaság pedig meghívta vacsorázni. A vacsora végén megkérdezte a társaság minden tagjától, hogy hány nagyotmondó van a társaságban. A kishitűek az igazságnál kisebb vagy egyenlő, a nagyotmondók pedig nagyobb vagy egyenlő számot válaszoltak. A következő válaszokat kapták: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Hány nagyotmondó lehetett közöttük?

3. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc  $4 \times 4$ -es bűvös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhettek pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát minél többféle értékre. Ha úgy gondoljátok, hogy már az összes lehetséges értéket megtaláltátok, akkor próbáljátok meg indokolni is, hogy más érték miért nem lehetséges.



4. Az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú és az  $A$  csúcsnál derékszöge van. Több olyan egyenes is van, amely egyszerre teljesíti az alábbi két feltételt:

- az  $A$  és  $B$  pontoktól egyenlő távolságra van;
- a  $C$  ponttól éppen háromszor akkora távolságra van, mint a  $B$  ponttól.

Szerkesszettek meg ezen egyenesek közül minél többet és indokoljátok is, miért teljesítik a feltételeket! Pont és egyenes távolságát a pontból az egyenesre állított merőleges egyenesen mérjük.

5. a) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 4 futót és 4 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

b) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 5 futót és 5 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

c) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 6 futót és 6 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

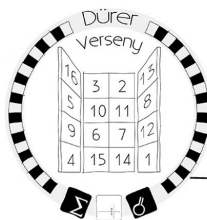
6. (Játék) A játék kezdetén a szervezők néhány, de legfeljebb 10 korongot letesznek az asztalra, mindegyiket a piros vagy a kék felével felfelé. A soron következő játékos összesen négyfélét léphet:

- 1 vagy 2 kék korongot elvehet az asztalról.
- 1 vagy 2 piros korongot átfordíthat kékké.

Aki már nem tud lépni, az elveszíti a játékot.

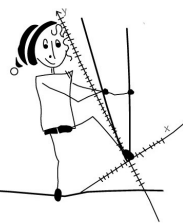
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.





# Matek megoldókulcs

## 7 - 8. osztályosok



1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek számjegyeinek összege is 10 és a számjegyeinek szorzata is 10?

**Megoldás:** A 10 prímtényezőző felbontása  $2 \cdot 5$ , tehát egy szám számjegyeinek szorzata akkor lehet 10, ha tartalmaz pontosan egy darab 2-es és egy darab 5-ös számjegyet. Továbbá még 1-es számjegyek lehetnek a számjegyek között. Az összegre vonatkozó feltétel miatt  $10 - (2+5) = 3$  darab 1-es számjegyet kell még tartalmaznia a keresett számoknak. Három darab 1-es, egy darab 2-es és egy darab 5-ös számjegyből 20 különböző ötjegyű szám állítható elő: az 5-ös öt helyre kerülhet, ezután a 2-es négy helyre, és a szabadon maradó helyeket feltöltjük egyesekkel.

2. A kishitűek és nagyotmondók szigetén minden ember kishitű vagy nagyotmondó. Egyszer egy külföldi tévedt a szigetre, egy tízfős társaság pedig meghívta vacsorázni. A vacsora végén megkérdezte a társaság minden tagjától, hogy hány nagyotmondó van a társaságban. A kishitűek az igazságnál kisebb vagy egyenlő, a nagyotmondók pedig nagyobb vagy egyenlő számot válaszoltak. A következő válaszokat kapta: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Hány nagyotmondó lehetett közöttük?

**Megoldás:** Akik 11-et és 12-t mondtak, azok biztosan nagyotmondók. Jelöljük a nagyotmondók számát  $k$ -val. Aki  $k+1, k+2, \dots, 12$ -t mondott az biztosan nagyotmondó, belőlük  $12-k$  darab van. Aki  $k$ -t mondott, az bármilyen lehet. Ugyanakkor aki  $1, 2, \dots, k-1$ -et mondott, az biztosan kishitű. Tehát ezek alapján a nagyotmondók száma  $12-k$  vagy  $12-(k-1) = 13-k$  lehet. Ebből a két lehetőségből  $13-k$  nem lehetséges, mert ekkor  $k = 13-k$  volna, de  $k$  egész, így nem lehet 6,5. Tehát  $k = 12-k$  nagyotmondó van, ekkor  $k = 6$ , ami lehetséges. Tehát 6 nagyotmondó van a társaságban.

3. Albrecht Dürer úgy döntött, hogy kedvenc  $4 \times 4$ -es bővös négyzetének mezőit kiszínezi. A 16 mező mindegyike lehet piros, kék vagy zöld. Hány mezőt színezhetett pirosra, ha minden mezőnek van oldalszomszédja mindkét másik színből?

Adjatok példát minél többféle értékre. Ha úgy gondoljátok, hogy már az összes lehetséges értéket megtaláltátok, akkor próbáljátok meg indokolni is, hogy más érték miért nem lehetséges.

**Megoldás:** A bal felső 4 kis négyzet között biztosan van piros, ugyanis vagy a sarok piros, vagy a két szomszédja közül valamelyik. Ugyanez igaz a bal alsó, a jobb felső és a jobb alsó 4 kis négyzetre. Ez a négy csoport csupa különböző négyzetet tartalmaz, tehát van legalább 4 piros négyzet.

Természetesen ez elmondható a kék és zöld színre is. Ezért nem lehet 8-nál több piros négyzet, mert ekkor az összesen 16 négyzetből legfeljebb 7 maradna a kékeknek és a zöldeknek, viszont mindkettőből legalább 4 van.

Tehát a piros négyzetek lehetséges száma 4, 5, 6, 7 vagy 8. Ezek mindegyike meg is valósítható, például a következő módokon.

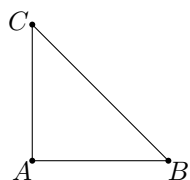
|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $k$ | $p$ | $z$ | $k$ |
| $z$ | $k$ | $k$ | $p$ |
| $p$ | $k$ | $k$ | $z$ |
| $k$ | $z$ | $p$ | $k$ |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $k$ | $p$ | $z$ | $k$ |
| $z$ | $k$ | $k$ | $p$ |
| $p$ | $p$ | $k$ | $z$ |
| $k$ | $z$ | $p$ | $k$ |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $k$ | $p$ | $z$ | $k$ |
| $z$ | $k$ | $p$ | $p$ |
| $p$ | $p$ | $k$ | $z$ |
| $k$ | $z$ | $p$ | $k$ |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $p$ | $k$ | $z$ | $p$ |
| $z$ | $p$ | $p$ | $k$ |
| $k$ | $k$ | $p$ | $z$ |
| $p$ | $z$ | $k$ | $p$ |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $p$ | $k$ | $z$ | $p$ |
| $z$ | $p$ | $p$ | $k$ |
| $k$ | $p$ | $p$ | $z$ |
| $p$ | $z$ | $k$ | $p$ |



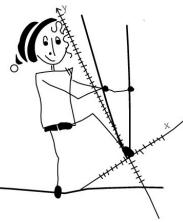
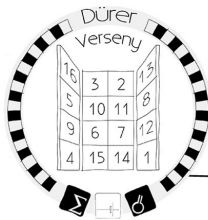
4. Az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú és az  $A$  csúcsnál derékszöge van. Több olyan egyenes is van, amely egyszerre teljesíti az alábbi két feltételt:

- az  $A$  és  $B$  pontoktól egyenlő távolságra van;
- a  $C$  ponttól éppen háromszor akkora távolságra van, mint a  $B$  ponttól.

Szerkesszettek meg ezen egyenesek közül minél többet és indokoltátok is, miért teljesítik a feltételeket! Pont és egyenes távolságát a pontból az egyenesre állított merőleges egyenesen mérjük.

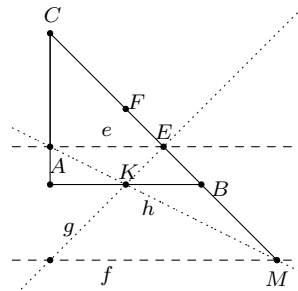
**Megoldás:** Jelölje az  $ABC$  háromszög befogójának hosszát  $a$ , az  $AB$  szakasz felezőpontját  $K$ . A  $BC$  szakasz  $B$ -hez közelebb eső negyedelőpontját  $E$ , míg a  $BC$  egyenesen  $B$ -től  $C$ -vel ellentétes irányban  $|BC|/2$  távolságra lévő pontot  $M$ .

Az első feltételnek eleget tévő egyenesek két csoportra bonthatóak, az egyik típus az összes  $K$ -n áthaladó egyenes, a másik típus az összes  $AB$  szakasszal párhuzamos egyenes.



A második feltételnek eleget tevő egyenesek pontosan azok, melyek vagy az  $E$ , vagy az  $M$  ponton áthaladnak.

Így már könnyebb áttekinteni azokat az egyeneseket, amelyekre egyszerre teljesül az első és a második feltétel is. A két-két feltétel négy lehetséges módon kombinálható, és minden kombinációhoz pontosan egy egyenes tartozik. Az ábrán  $e$  jelöli az  $AB$ -vel párhuzamos és  $E$ -n áthaladó egyenest,  $f$  pedig az  $AB$ -vel párhuzamos és  $M$ -en áthaladó egyenest. Továbbá  $g$  jelöli a  $K$ -n és  $E$ -n is áthaladó egyértelmű egyenest és  $h$  jelöli a  $K$ -n és  $M$ -en is áthaladó egyértelmű egyenest.

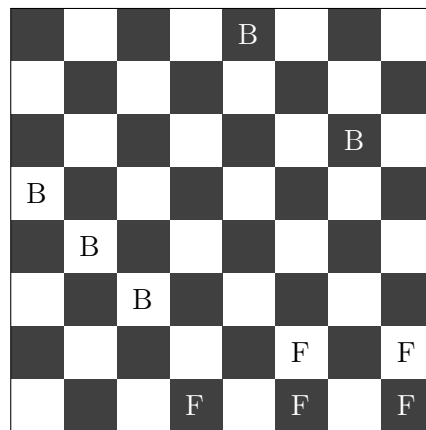
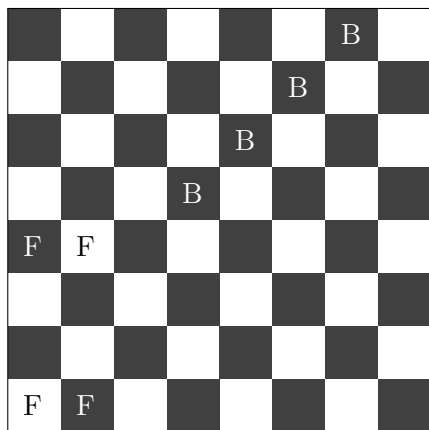


Összesen tehát 4 olyan egyenes létezik, mely mind a két feltételnek eleget tesz. Most vázlatosan leírjuk ezen egyenesek szerkesztési menetét.

Szakasz felezőpontjának szerkesztése: A szakasz két végpontjából a szakasz hossza sugarú köröket rajzolunk és a két kör két metszéspontját összekötő egyenes a szakaszt a szakasz felezőpontjában metszi. Így megszerkeszthetjük  $K$ -t, a  $BC$  szakasz felezőpontját, melyet jelöljön  $F$ , majd az  $FB$  szakasz felezőpontját  $E$ -t, és az  $FB$  távolságot felmérhetjük a  $BC$  egyenesre, így kapjuk  $M$ -et. Ezután  $E$ -n illetve  $M$ -en keresztül párhuzamost szerkesztünk az  $AB$  egyenessel, ennek menetét most nem részletezzük.

5. a) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 4 futót és 4 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?  
 b) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 5 futót és 5 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?  
 c) El lehet-e helyezni egy sakktáblán 6 futót és 6 bástyát úgy, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat?

**Megoldás:** 5-5, és így természetesen 4-4 bábút is el lehet helyezni, például az alábbi ábrákon látható módon (a futókat F, a bástyákat B jelöli).



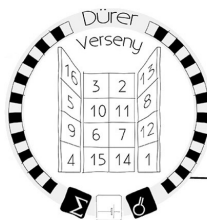
- c) 6 futót és 6 bástyát már nem lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy semelyik bábu ne üsse semelyik másikat. Ugyanis, ha felteszünk 6 bástyát a sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást, akkor azok 6 különböző oszlopban, illetve sorban lesznek. Ebbe a 6 sorba és 6 oszlopba már nem helyezhető el további bábu, mert akkor ezen 6 bástya valamelyike ütné azt. Így a 6 bástya felhelyezése után  $64 - 6 \cdot 8 = 64 - 48 = 16$  olyan mező marad a sakktáblán, ahova még lehet bábút tenni. Azaz 4 mezőre kellene feltenni 6 futót, ami nem lehetséges, mert minden mezőn csak egy bábu állhat.

6. **(Játék)** A játék kezdetén a szervezők néhány, de legfeljebb 10 korongot letesznek az asztalra, mindegyiket a piros vagy a kék felével felfelé. A soron következő játékos összesen négyfélét léphet:

- 1 vagy 2 kék korongot elvehet az asztalról.
- 1 vagy 2 piros korongot átfordíthat kékké.

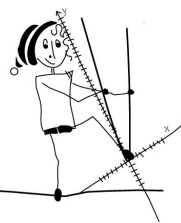
Döntő

2017.  
február 11.



# Matek megoldókulcs

## 7 - 8. osztályosok



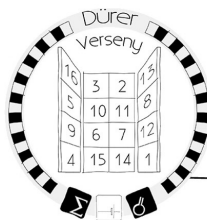
Aki már nem tud lépni, az elveszíti a játékot.

**Megoldás:** Nyerő stratégia, hogyha mindig úgy lépsz, hogy a lépésed után a kék korongok száma 3-mal osztható, azaz 0, 3, 6 vagy 9 legyen. Speciálisan, ha a játék kezdetén ez teljesül, akkor a másodiknak van nyerő stratégiája, ellenkező esetben a kezdőnek. A stratégia helyességének bizonyításához három dolgot kell belátni: a játék biztosan véget ér; nyerő állásból nem lehet nyerő állásba lépni; valamint nem nyerő állásból biztosan lehet nyerő állásba lépni.

Egyrészt a játék biztosan befejeződik, hiszen ha a piros korongok 2-t, a kék korongok 1-et érnek, akkor minden lépésben legalább eggyel csökken a korongok összértéke. Másrészt ha a kék korongok száma 3-mal osztható, akkor a másik vagy nem tud lépni, és így vesztett, vagy a négy lépés bármelyikét lépi, és így a kék korongok száma nem lesz 3-mal osztható: eggyel vagy kettővel csökken vagy növekszik. Harmadrészt ha a kék korongok száma nem osztható 3-mal (és a nyerő stratégiát követve mindig csak ilyen helyzetben lépünk), akkor tudunk úgy lépni, hogy 3-mal osztható legyen: elveszünk 1 kék korongot ha a kék korongok száma 3-mal osztva 1 maradékot ad, vagy elveszünk 2 kék korongot, ha a kék korongok száma 3-mal osztva 2 maradékot ad.

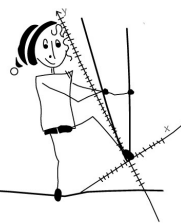
Döntő

2017.  
február 11.



# Váltóverseny

## 7 - 8. osztályosok



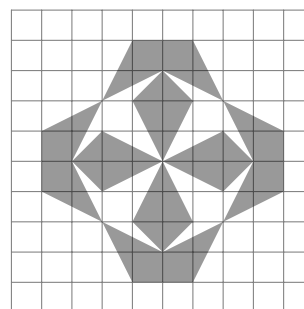
**B-1.** Anna leírta a római számokat 1-től 30-ig növekvő sorrendben. Béla is leírta ugyanezeket a római számokat, de ő ábécé-sorrendben. Hány helyen egyezik meg a két sorrend? (3 pont)

**B-2.** Az Albrecht Dürer Gimnázium 7.D osztályában a fiúk közül hárman (Bálint, Gábor és Dani), és a lányok közül is hárman (Zsuzsi, Ildi és Magdi) szeretik a matekot. Hányféleképpen alakulhat meg az osztály Dürer-csapata, ha a csapatnak három matekot szerető diákból kell állnia és kell, hogy legyen benne legalább egy lány (más megkötés nincs és a csapaton belüli sorrend nem számít). (3 pont)

**B-3.** Egy 30 fős osztály az osztálykirándulás alkalmával elment palacsintázni. Mindenki legalább egy palacsintát rendelt az alábbi háromféle közül: kakaós, lekváros és túrós. 14-en kértek túrósat, 15-en kakaósat és 9-en lekvárosat. Pontosan kétféle palacsintát 6 diák evett. Hányan ettek mindhárom fajta palacsintából? (3 pont)

**B-4.** Melyik az a legnagyobb háromjegyű szám, amelyet számjegyei összegével akár növelünk, akár csökkentünk, csupa azonos számjegyből álló számot kapunk? (3 pont)

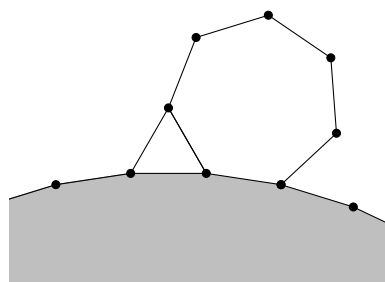
**B-5.** Albrecht Dürer újabb üvegablakot tervez a nürnbergi Lorenzkirche számára. Az ábrán látható a tervrajz, melyen minden kis négyzet egységnyi területű (tehát az egész ablaktábla éppen 100 egységnyi területű). Hány egységnyi a szürke rész területe? (4 pont)

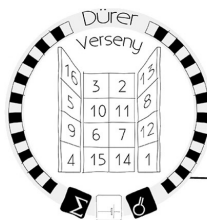


**B-6.** Egy sorozat első eleme 76 és minden további elemet a következő szabály szerint kapunk: ha az utolsó tag páros volt, akkor azt elosztjuk kettővel, ha pedig páratlan, akkor megszorozzuk öttel és hozzáadunk egyet. Mi az így kapott sorozat 2017. eleme? (4 pont)

**B-7.** Négy egész számból mind a hatféle páronkénti szorzatot kiszámítottuk. A hat szorzat közül ötnek az értéke: 20, 30, 40, 50, 60. Mennyi a hatodik szorzat értéke? (4 pont)

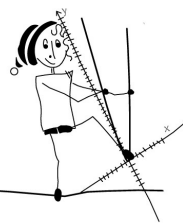
**B-8.** A képen egy szabályos háromszög, egy szabályos hétszög és egy szürke szabályos sokszög találkozik. Hány oldalú a szürke szabályos sokszög? (4 pont)





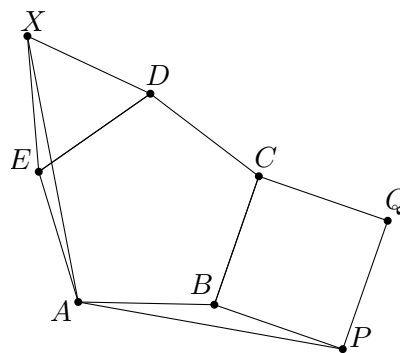
# Váltóverseny

## 7 - 8. osztályosok

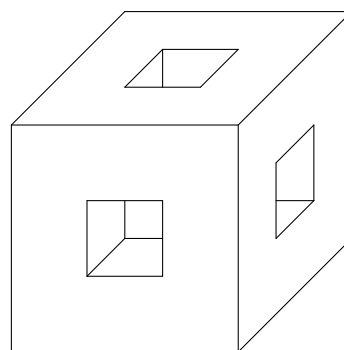


**B-9.** Jelölje  $P$  a legkisebb számot, amelyhez van négy különböző pozitív egész szám, amelyek szorzata 162 és összege  $P$ . Hasonlóan jelölje  $Q$  a legnagyobb számot, amelyhez van 4 különböző pozitív egész szám, amelyek szorzata 162 és összege  $Q$ . Mennyi  $Q - P$ ? (5 pont)

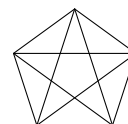
**B-10.** Az  $ABCDE$  szabályos ötszög  $DE$  oldalára kifelé megszerkesztettük az  $EDX$  szabályos háromszöget. Valamint a  $BC$  oldalára kifelé megszerkesztettük a  $CBPQ$  négyzetet. Hány fokos a  $PAX$  szög? (5 pont)



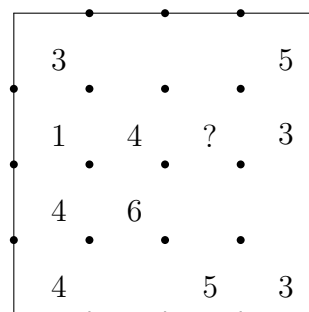
**B-11.** Egy kockából minden élével párhuzamosan kivágtunk egy-egy négyzet alapú hasábot az ábrán látható módon. A hasáb alapjának (a négyzetnek) oldalhossza harmada a kocka élhosszának. Mekkora az így kapott test felszíne  $\text{dm}^2$ -ben, ha a térfogata  $160 \text{ dm}^3$ ? (5 pont)



**B-12.** Hány háromszöget határolnak az ábra vonalai? (5 pont)

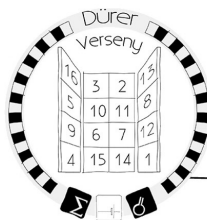


**B-13.** Az ábrán a Dürer Kreatív Névkitaláló Kft. irodájának alaprajza látható. A pontok oszlopokat jelölnek, melyek segítségével 16 egyforma négyzet alakú mezőre fel lehet osztani az irodát. Minden ilyen mezőben egy ember dolgozik. Néhány szomszédos oszlop közé kelet-nyugati vagy észak-déli irányú falakat is építettek, bár ezeket (az iroda külső falán kívül) az ábrán nem jelöltük. Egy mezőn ülő ember északi, déli, nyugati, illetve keleti irányban látja az összes kollégáját, kivéve ha valahol falat építettek kettőjük közé. Néhány mezőre rá is írtuk, hogy az ott ülő hány munkatársát látja. Milyen számot írhattunk a kérdőjeles mezőre? (6 pont)

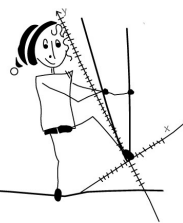


Döntő

2017.  
február 11.



## Váltóverseny 7 - 8. osztályosok



**B-14.** Albrechtke téglalap alakú szobáját  $68 \times 119 = 8092$  négyzet alakú járólappal fedték le. Albrechtke megrajzolta a padlón a szobája egyik átlóját. Hány járólapon megy keresztül ez a vonal, ha azok a járólapok nem számítanak, amelyek csak 1 pontban érintkeznek vele? (6 pont)

**B-15.** Legfeljebb hány 150 fokos szöge lehet egy konvex 2017-szögnek? (6 pont)

**B-16.** Legfeljebb hány mezőjét színezhetjük be egy  $7 \times 7$ -es táblázatnak, ha azt szeretnénk, hogy ne legyen négy olyan mező beszínezve, melyek középpontjai a táblázat oldalaival párhuzamos oldalú téglalapot alkotnak? (6 pont)

**Megoldókulcs:**

|      |     |      |    |       |     |       |     |
|------|-----|------|----|-------|-----|-------|-----|
| B-1. | 15  | B-5. | 28 | B-9.  | 14  | B-13. | 3   |
| B-2. | 19  | B-6. | 6  | B-10. | 111 | B-14. | 170 |
| B-3. | 1   | B-7. | 24 | B-11. | 288 | B-15. | 11  |
| B-4. | 105 | B-8. | 42 | B-12. | 35  | B-16. | 21  |