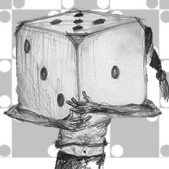


Döntő  
2018. február 9.



# XI. Dürer Verseny Matematika kifejtős

9-10. osztályosok



1. Adjatok meg 5 pozitív egész számot úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
2. 9 gyerek mindegyike szeret legalább egy ételt a spenót, a finomfőzelék, a paradicsomos káposzta és a brokkoli közül. Tudjuk, hogy bármelyik két gyerekhez lehet találni olyan ételt a 4 közül, amelyet egyikük szeret és a másikuk nem. Bizonyítsátok be, hogy van két olyan gyerek, akik közül az egyik pontosan azokat az ételeket szereti, amelyeket a másik nem.
3. Az  $A, B, C, D$  pontok a következőképpen helyezkednek el a síkon: az  $AB$  és  $CD$  szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő hosszúak, ráadásul  $D$  éppen az  $AB$  szakasz  $A$ -hoz közelebbi harmadolópontja. A  $D$  pontból a  $BC$ -re állított merőleges talppontja legyen  $E$ . A  $DE$  szakasz  $E$ -hez közelebbi harmadolópontja legyen  $H$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $CH$  és az  $AE$  szakaszok merőlegesek egymásra.
4. A mogyorós-mazsolás csoki 100 kockából áll, minden kockában a mogyorók és a mazsolák száma egész szám. Mi az a legkisebb  $k$  szám, amelyre igaz, hogy bármelyik ilyen tábla csokiból megehetünk  $k$  darab kockát úgy, hogy ezzel megettük a mogyoróknak és a mazsoláknak is legalább a felét?
5. Egy bolha ugrál egy 120 cm kerületű körön. Mindig az óramutató járásával megegyező irányban ugrik, összesen 120-szor. Ugrásainak hossza a kör kerületén mérve 1 cm, 2 cm, ..., 119 cm, 120 cm, nem feltétlenül ebben a sorrendben.
  - a) Hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet a bolha egy ilyen ugrássorozat során?
  - b) Ha ugyanezen a körön 60-szor ugrik a bolha úgy, hogy ugrásainak hossza 1 cm, 2 cm, ..., 59 cm, 60 cm, akkor hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet?
6. **Játék:** A játék kezdetén egy  $n \times k$ -as téglalap minden mezőjére teszünk egy-egy korongot. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol. Kezdetben csak egy ilyen téglalap van, később már lehet hogy több is.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.

*Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás (azaz  $n$  és  $k$ ) ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.*

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk:*