C1. Adjatok meg 5 pozitív egész számot úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.

Megoldás: Könnyen ellenőrizhető, hogy a 24, 48, 72, 96, 120 számok például ilyenek. A **D3**-as feladat megoldásánál láthatjuk azt is, hogy tetszőleges n-re található n darab ilyen szám, de végtelen sokat már nem lehet megadni.

C2. 9 gyerek mindegyike szeret legalább egy ételt a spenót, a finomfőzelék, a paradicsomos káposzta és a brokkoli közül. Tudjuk, hogy bármelyik két gyerekhez lehet találni olyan ételt a 4 közül, amelyet egyikük szeret és a másikuk nem. Bizonyítsátok be, hogy van két olyan gyerek, akik közül az egyik pontosan azokat az ételeket szereti, amelyeket a másik nem.

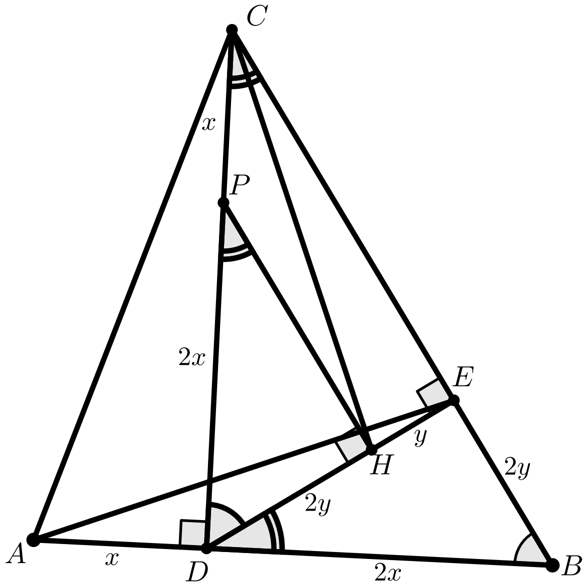
Megoldás: Négyféle étel szerepel a feladatban. Ez alapján 16-féle ízlésű gyerek létezhet, hiszen minden ételről külön-külön eldöntheti valaki, hogy szereti vagy nem, ez $2^4 = 16$ lehetőség. Az azonos ízlésű gyerekek halmazát nevezzük *ízlés-csoportnak*. „Azt is tudjuk, hogy bármelyik két gyerekhez lehet találni olyan ételt a 4 közül, amit egyikük szeret és a másik nem.” Ez alapján minden ízlés-csoportban legfeljebb egy gyerek lehet.

A 16 féle ízlés-csoportot rendezzük komplementer párokba, egy ízlés-csoport komplementere az az ízlés-csoport, ami mindenről pont ellentétesen vélekedik. Például a csak a spenótot szeretők csoportjának komplementere az a csoport, akik a spenótót nem, de a finomfőzeléket, a paradicsomos káposztát és a brokkolit szeretik. A mindent szeretők komplementere a semmit sem szeretők csoportja, de a feladat feltételei szerint a semmit sem szeretők csoportja üres.

A 16 ízlés-csoportot így 8 párra (halmazra) osztottuk szét. A skatulyaelv alapján 9 gyerek közül lesz kettő, aki azonos halmazba esik. A teljesen azonos ízlésűeket a feladat kizárta, így ők komplementer ízlésűek, azaz találtunk két gyereket, hogy egyikük éppen azokat az ételeket szereti, amit a másik nem.

C3. Az A,B,C,D pontok a következőképpen helyezkednek el a síkon: az AB és CD szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő hosszúak, ráadásul D éppen az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja. A D pontból a BC-re állított merőleges talppontja legyen E. A DE szakasz E-hez közelebbi harmadolópontja legyen H. Bizonyítsátok be, hogy a CH és az AE szakaszok merőlegesek egymásra.

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit, legyen P a CD szakasz belső pontja úgy, hogy $PH \parallel CE$ (azaz $PH \perp DE$). Legyen $AD = x$, ekkor a feladat feltételei alapján $DB = 2x$ és $DC = 3x$. Végül legyen $HE = y$, így $DH = 2y$. A megoldás kulcsa a következő lemma.



Lemma: DHP és BED háromszögek egybevágóak.

Lemma 1. biz.:
Legyen $CBA\sphericalangle = \alpha$ és $EDB\sphericalangle = \beta$, tehát $\alpha + \beta = 90°$. Mivel $BDC\sphericalangle = 90°$, így $HDP\sphericalangle = \alpha$. Azonban $PHD\sphericalangle = 90°$, vagyis $DPH\sphericalangle = \beta$. Vagyis a két háromszög szögei egyenlőek, azaz hasonlóak, már csak azt kell megmutatni, hogy egybevágóak is. Ehhez azt látjuk be, hogy $PD = 2x = DB$.
Mivel $HP \parallel EC$, így a *párhuzamos szelők tétele* szerint $\frac{DP}{DC} = \frac{DH}{DE} = \frac{2}{3}$, amiből $PD = \frac{2}{3}DE = 2x$. □
A lemmából következik, hogy mivel DHP háromszögben a β nagyságú szöggel szemközti oldal hossza $2y$, így ez igaz a BED háromszögben is, vagyis $EB = 2y$.

Lemma 2. biz.: Vegyük fel a szögeket az előző bizonyításban leírt módon. Vegyük észre, hogy DEC és BDC háromszögek hasonlóak, mivel szögeik nagysága páronként megegyezik. A hasonlóság miatt az oldalaik arányára a következő teljesül:

$$\frac{DB}{CD} = \frac{EB}{DE}$$

$$EB = \frac{DB \cdot DE}{CD} = \frac{2x \cdot 3y}{3x} = 2y$$

Tehát DHP és BED háromszögek valóban egybevágóak, hiszen két oldaluk hossza és az általuk közrezárt szög nagysága megegyezik. □

Végül vegyük észre, hogy mivel $EB = DH = 2y$, $AB = CD = 3x$ és $CBA\sphericalangle = HDC\sphericalangle = \alpha$, így ABC és CDH háromszögek két szomszédos oldalának és ezen oldalak által közrezárt szögének nagysága megegyezik, ami azt jelenti, hogy a két háromszög egybevágó. Mivel AB és CD egymásnak megfelelő oldalak a két háromszögben, és $AB \perp CD$, így a két háromszög egy derékszögű forgatással és egy eltolással vihető egymásba, vagyis a két háromszögben a megfelelő oldalak merőlegesek egymásra.

Mivel AE és CH is egymásnak megfelelő oldalak, így valóban $AE \perp CH$, ezzel beláttuk a bizonyítandót.

Megjegyzés a megoldáshoz. A megoldás során egyszer használtuk a párhuzamos szelők tételét, azonban nagyon speciális esetben. Mivel H harmadolópont, a tételre való hivatkozás könnyen kiváltható egyszerű egybevágóságokkal: ha a DHP középvonalait meghúzzuk, illetve P-n keresztül párhuzamost húzunk DE-vel, akkor egybevágó derékszögű háromszögek keletkeznek. Így a megoldás a párhuzamos szelők tételének (avagy a hasonlósági alapeseteknek) ismerete nélkül is elérhető.

C4. A mogyorós-mazsolás csoki 100 kockából áll, minden kockában a mogyorók és a mazsolák száma egész szám. Mi az a legkisebb k szám, amelyre igaz, hogy bármelyik ilyen tábla csokiból megehetünk k darab kockát úgy, hogy ezzel megettük a mogyoróknak és a mazsoláknak is legalább a felét?

Megoldás: A megoldás 51 kocka.

Először mutassuk meg, hogy létezik olyan elrendezés, amikor meg kell ennünk 51 kockát: legyen a csokiban csak 1 szem mogyoró, a maradék 99 kockában pedig mindenhol $1-1$ szem mazsola. Csak egész kockákat szabad enni, felet nem. Ahhoz, hogy a mogyorók felét megegyük, meg kell ennünk azt az 1 mogyorós kockát. Ahhoz, hogy a mazsolák felét megegyük, meg kell ennünk a 99 mazsolás kockából legalább 50-et. Ez összesen 51 kocka, és ebben az elrendezésben kevesebb nem elég.

Másodjára mutassuk meg, hogy sosem jöhet létre olyan elrendezés, hogy muszáj legyen legalább 52 kockát megenni.

Indirekt tegyük fel, hogy *van* olyan elrendezés, ahol bárhogy eszünk meg 51 kockát az nem elegendő. Ekkor a maradék 49 kocka tartalmazza a mogyorók több, mint felét vagy a mazsolák több, mint felét. Ez bármelyik 49 kockából álló halmazra igaz lesz. Számozzuk meg a kockákat egytől százig. Az $\{1, 2, \ldots, 49\}$ halmazban valamelyik csemegének több, mint fele van. Itt még mindegy, hogy a mogyoróké vagy mazsoláké, ezért az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy a mogyoróké. Az $\{50, 51, \ldots, 98\}$ halmazban a mazsolák több, mint fele van. Ez diszjunkt az első halmaztól, tehát nem lehet mindkét helyen a mogyoróknak több, mint fele. Hasonlóan folytathatjuk a gondolatmenetet: a $\{99, 100, 1, \ldots, 47\}$ halmazban a mogyorók több, mint fele van, így a $\{48, 49, \ldots, 96\}$ halmazban a mazsolák több, mint fele van, vagyis a $\{97, 98, 99, 100, 1, \ldots, 45\}$ halmazban a mogyorók több, mint fele van.

A sorszámokat ciklikusan tekinthetjük. A *mogyorós* halmazok kezdőtagjának sorszáma lépésenként kettővel csökken (mindig páratlan szám), azaz eljutunk oda, hogy a $\{51, 52 \ldots, 99\}$ halmazban a mogyorók több, mint fele van. Ez diszjunkt a $\{1, 2, \ldots, 49\}$ halmaztól, ahol szintén a mogyorók több, mint fele van. Összességében a $\{1, 2, \ldots, 49, 51, 52, \ldots, 99\}$ halmazban több mogyorónak kellene lennie, mint amennyi a teljes csokiban van.

Ellentmondásra jutottunk, ezért sosem jöhet létre olyan elrendezés, hogy muszáj legyen legalább 52 kockát megenni.

C5. Egy bolha ugrál egy 120 cm kerületű körön. Mindig az óramutató járásával megegyező irányban ugrik, összesen 120-szor. Ugrásainak hossza a kör kerületén mérve 1 cm, 2 cm, …, 119 cm, 120 cm, nem feltétlenül ebben a sorrendben.
a) Hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet a bolha egy ilyen ugrássorozat során?
b) Ha ugyanezen a körön 60-szor ugrik a bolha úgy, hogy ugrásainak hossza valamilyen sorrendben 1 cm, 2 cm, …, 59 cm, 60 cm, akkor hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet?

Megoldás: a) Az ugrássorozat folyamán a bolha valamikor 60 cm-t ugrik, valamilyen P pontból Q pontba. Mivel 60 cm pontosan a kerület fele, így bármilyen 60 cm-nél hosszabb körív tartalmazza vagy P-t vagy Q-t a belsejében. Tehát legfeljebb 60 cm-t tud elkerülni.

Megmutatjuk, hogy megfelelő ugrássorozattal el is érhető, hogy elkerüljön egy 60 cm-es részt. Legyen a következő az ugrássorozat: $119, 1, 118, 2, 117, 3, \ldots, 59, 61$, és végül $60, 120$.

Legyen a bolha kiindulópontja S, és az azzal átellenes pont a körön T. Az ugrássorozat elején mindig $x, 120-x$ távolságokat ugrik, tehát minden második ugrásra visszatér S-re. Mivel mindig a nagyobbik ugrással kezdi, így a páratlanadik ugrások után óramutató járása szerint T után de S előtt landol. Tehát elkerüli az S-től T-ig tartó 60 cm-es szakaszt. Végül a 60 cm-es ugrással S-ről T-re ugrik, és a 120 cm-es ugrással T-ről T-re ugrik. Tehát egyszer sem landol az S-től T-ig tartó 60 cm-es körív belsejében.

b) Összesen $\frac{60 \cdot 61}{2} = 1830$ cm-t halad előre a bolha, ami több, mint 15 teljes kör. Tegyük fel, hogy a bolha elkerül egy x hosszúságú körívet. Mivel minden lépése rövidebb, mint egy kör, ezért legalább 15 különböző lépésben áthalad az elkerült körív felett. Tehát x legfeljebb 46, mivel 46 hosszú a bolha 15. leghosszabb ugrása.

Megmutatjuk, hogy egy 46 hosszú rész elkerülhető egy megfelelő lépéssorozattal. A bolha ugrásait négy ugrásból álló fordulókba rendezzük, 15 forduló lesz. Az i. fordulóban az ugrások legyenek $14 + i, 60 - 14 - i, i - 1, 60 - (i - 1)$. Az első fordulóban a harmadik ugrás kimarad mert 0 hosszú lenne. Az egyetlen kimaradó ugrás a 30 hosszúságú, amit a bolha a fordulók után tesz meg.

Legyen S a bolha kiinduló pontja. Vegyük észre, hogy minden forduló pontosan egy kör megtételét jelenti, tehát mindig S-re érkezik a forduló végén. A forduló utolsó ugrásai rendre $60, 59, \ldots, 46$ hosszúak. Mivel az utolsó ugrások mind ugyan oda érkeznek, ez azt jelenti, hogy az S előtti 46 cm-es részt elkerüli az ugrások során a bolha. Az utolsó extra 30 cm-es ugrással sem lép rá erre a részre, mivel $30 + 46 < 120$. Tehát 46 cm elkerülhető, de több nem.

C6. **Játék:** A játék kezdetén egy $n \times k$-as téglalap minden mezőjére teszünk egy-egy korongot. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol. Kezdetben csak egy ilyen téglalap van, később már lehet hogy több is.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás (azaz n és k) ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

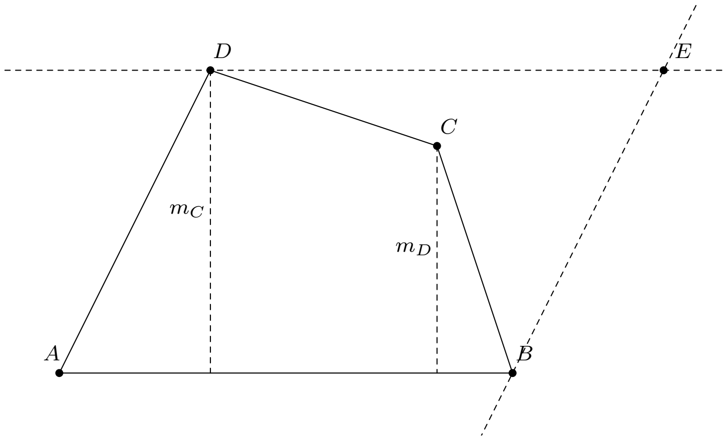
Megoldás: Ha a téglalapnak mindkét oldala páros, akkor a Második nyer, ha pedig van páratlan oldala, akkor a Kezdő.

Van páratlan oldal: Tegyük fel, hogy $(2\ell + 1) \times r$-es a téglalap, ahol ℓ egész. Ekkor a Kezdő játékos nyerni tud úgy, hogy elveszi a középső sort, azaz két darab $\ell \times r$-es téglalapot hagy maga után. Ugyanis innentől kezdve Kezdő tekintheti úgy a pályát, mintha az két egyforma pályarészből állna, és ekkor akármit lép Második az egyik játékrészben, azt Kezdő a másik játékrészben le tudja utánozni, ilyen módon pedig garantált, hogy Kezdő fog utoljára lépni.

Mindkét oldal páros: Ekkor a Második játékos tud nyerni. Ugyanis ha a tábla közepére Második odaképzel egy zöld pöttyöt (a középső 4 mező közé), akkor bármit lépjen Kezdő, azt Második le tudja utánozni úgy, hogy a zöld pöttyre tükrözve lépi meg ugyanazt. Meggondolható, hogy bármely lépésnek így a tükörképét végre tudja hajtani, például egy lépés tükörképe mindig csak vele diszjunkt mezőket fog tartalmazni.

C+1. Bizonyítsátok be, hogy bármely négyszögnek kiválasztható két szomszédos oldala, amelyeket paralelogrammává kiegészítve a kapott paralelogramma tartalmazza az eredeti négyszöget.

Megoldás: Válasszuk ki a szomszédos oldalak alkotta 4 háromszög közül a legnagyobb területűt (ha több van, akkor ezek közül az egyiket). Ezt kiegészítve a feladat feltételeinek megfelelő paralelogrammát fogunk kapni.



Legyen az ADB háromszög maximális területű a háromszögek közül, legyen E a paralelogramma negyedik csúcsa.

A C csúcs nem lehet a DE egyenes felett, hiszen ekkor az

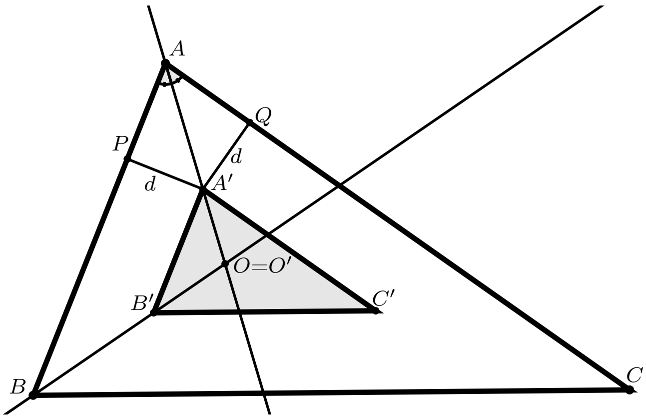
$$T_{ABD} = \frac{AB \cdot m_D}{2} < \frac{AB \cdot m_C}{2} = T_{ABD}$$

egyenlőtlenség teljesülne, amely ellentmond ABD maximalitásának. Hasonlóan meggondolható, hogy a C csúcs nem lehet a BE egyenes jobboldalán.

Mivel a négyszög oldali nem metszik egymást, így C az AB egyenes felett, illetve az AD egyenes jobboldalán helyezkedik el. Azaz az $ABDE$ paralelogramma tartalmazza a C csúcsot. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

C+2. $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el, hogy $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ és $CA \parallel C'A'$, és ezen párhuzamos oldalak egymástól d távolságra vannak mindhárom esetben. Legyenek O és O' az ABC és $A'B'C'$ beírt köreinek középpontjai, K és K' pedig a köréírt köreinek középpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az O, O', K és K' pontok egy egyenesen vannak.

Megoldás:



1. Lemma: AA', BB' és CC' egy ponton mennek át.

1. lemma bizonyítása:
$ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ hasonlóak és a megfelelő oldalaik párhuzamosak, tehát van egy olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi. Ez az X középpontú hasonlóság, mivel a megfelelő oldalakat megfelelő oldalakba viszi, így a megfelelő csúcsokat is megfelelő csúcsokba, tehát az A, A', X pontok egy egyenesre esnek, hasonlóan B, B', X és C, C', X pontok is, tehát AA', BB', CC' egy ponton mennek át.

2. Lemma: $X = O$.

2. lemma bizonyítása: A'-ből merőlegeseket véve AB és AC oldalakra, ha a merőlegesek talppontjai P és Q, akkor $A'P = A'Q = d$ a feladat feltétele miatt. Ebből következik, hogy $APA'\triangle$ és $AQA'\triangle$ egybevágóak, mivel két oldaluk hossza és a megfelelő szögük megegyezik, tehát $PAA'\sphericalangle = QAA'\sphericalangle$, azaz AA' a $PAQ\sphericalangle = BAC\sphericalangle$ szögfelezője, ami $ABC\triangle$-ben szögfelező. Ugyanez elmondható BB' illetve CC'-ről, így mindhárom egyenes átmegy O-n. Mivel a három egyenes különböző (hisz bármely $ABC\triangle$-ben a szögfelezők különböznek), így legfeljebb egy közös metszéspontjuk lehet, és O az. Tehát $X = O$.

3. Lemma: $O = O'$.

3. lemma bizonyítása: Mivel O-ból egymásba lehet vinni a két háromszöget középpontos hasonlósággal, ezért O az $ABC\triangle$ beírt körét is $A'B'C'\triangle$ beírt körébe viszi, és a középpontját középpontba. Mivel az előző körnek O a középpontja, így a másiknak is O lesz, hiszen önmagából egy pontra tetszőleges középpontos hasonlóságot elvégezve önmagát kapjuk. Tehát $O' = O$.

Ugyanígy, a megfelelő középpontos hasonlóság K-t K'-be viszi, tehát O, K, K' egy egyenesre esik. Viszont $O = O'$. Ezzel az állítást beláttuk.

A megoldás diszkussziót nem igényel.

C+3. Egy bolha ugrál egy 120 cm kerületű körön. Mindig az óramutató járásával megegyező irányban ugrik, összesen 120-szor. Ugrásainak hossza a kör kerületén mérve 1 cm, 2 cm, ..., 119 cm, 120 cm, nem feltétlenül ebben a sorrendben.
a) Hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet a bolha egy ilyen ugrássorozat során?
b) Ha ugyanezen a körön 60-szor ugrik a bolha úgy, hogy ugrásainak hossza valamilyen sorrendben 1 cm, 2 cm, ..., 59 cm, 60 cm, akkor hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet?

Megoldás: Lásd a **C5** feladat megoldását.

C+4. Keressétek meg az $a^3+b^3=p^{2018}$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol a és b pozitív egészek, p pedig prímszám.

Megoldás: Alakítsuk szorzattá a az egyenlet bal oldalát:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=p^{2018} \tag{1}$$

Mivel p prímszám, ezért p^{2018} csakis úgy állhat elő szorzatalakban, ha

$$\begin{aligned} a+b &= p^n & (2)\\ a^2-ab+b^2 &= p^{2018-n} & (3)\end{aligned}$$

ahol $0 \leq n \leq 2018$.

Tudjuk, hogy a és b pozitív egész számok, ezért $a+b>1$, és így $n \neq 0$. Az is könnyen megmutatható, hogy $n \neq 2018$. Ehhez az $a^2-ab+b^2=1$ egyenletet kell megoldani. Átrendezve kapnánk ebből, hogy

$$(a-b)^2=1-ab$$

Az egyenlet bal oldala nemnegatív (egy egész szám négyzete), a jobb oldal pedig nempozitív, hiszen $a,\ b>0$. Egyenlőség így csak akkor állhat fenn, ha $a=b=1$. Ekkor viszont $p^{2018}=2$, ami nem lehetséges. Tehát $0<n<2018$. (*)

A (2) egyenlet négyzetéből kivonva a (3) egyenletet kapjuk, hogy

$$3ab=p^{2n}-p^{2018-n}=p^{2018-n}(p^{3n-2018}-1) \tag{4}$$

(Itt leszögezzük, hogy a (2) egyenlet négyzete szigorúan nagyobb a (3) egyenletnél.)

Mivel $n<2018$, ezért p osztja a (4) egyenlet jobb oldalát, tehát a bal oldalt is kénytelen osztani. A bal oldal egy szorzat, ezért $p \mid 3$, $p \mid a$, vagy $p \mid b$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy mindenképpen $p \mid 3$. Ha ugyanis $p \mid a$, akkor az $a^3+b^3=p^{2018}$ egyenlet miatt itt $p \mid b$, valamint ezek alapján a két szám felírható $a=pa_1$, valamint $b=pb_1$ alakban. Az eredeti egyenletbe behelyettesítve, majd p^3-nal egyszerűsítve

$$a_1^3+b_1^3=p^{2015}$$

Az így kapott egyenletet az eredeti analógiájára vizsgálhatjuk: az előbb alkalmazott lépéseket újra használva az egyenletben szereplő p kitevője 3-mal ismét csökkenthető. A megoldandó egyenlet így ezen lépések sorozatával leredukálható a következő alakra:

$$a_{672}^3+b_{672}^3=p^2 \tag{5}$$

(Fontos megjegyezni, hogy a fent (*)-gal jelölt megállapítás ezekre a csökkentett kitevőkre átfogalmazott analóg állításokra is igaz.)

Ezt is szorzattá alakítva, felállítva az új egyenletrendszert, majd a műveleteket hasonlóan elvégezve kapjuk, hogy

$$3a_{672}b_{672}=p(p-1)$$

Ha itt p osztaná a_{672}, vagy b_{672} valamelyikét, akkor az azt jelentené, hogy az (5) egyenlet bal oldala p^3-nal osztható lenne, viszont a jobb oldal (p^2) nem osztható p^3-nal, így ez nem lehet. Következésképpen muszáj, hogy $p \mid 3$, ami azt jelenti, hogy $p=3$.

Ezt az eredményt visszaírva a (4) egyenletbe:

$$3ab=3^{2018-n}(3^{3n-2018}-1) \tag{6}$$

Azt fogjuk belátni, hogy $2018-n \geq 2$. Ha $n = 2018$, akkor a már korábban megnézett $a^2-ab+b^2 = 1$ egyenletet kellene megoldanunk (amiről korábban láttuk, hogy nem lehet), $n = 2017$ esetén pedig a $a^2 - ab + b^2 = 3$ egyenletet. Ezt átalakítva $(a - b)^2 = 3 - ab$, aminek csak $a = 1$, $b = 2$, vagy $a = 2$, $b = 1$ a megoldása. Ekkor viszont nem igaz az $1^3 + 2^3 = 3^{2018}$ egyenlet. Tehát valóban $2018 - n \geq 2$. (**)

Ez viszont azt jelenti, hogy 9 osztja a (6) egyenlet jobb oldalát, így a bal oldalt is osztania kell, tehát a szimmetria miatt feltehető, hogy $3 \mid a$. Ekkor viszont $a^3 + b^3 = p^{2018}$ miatt $3 \mid b$. A korábbi felírásokkal élve $3^3 = 27$-tel elosztva az egyenletet kapjuk, hogy

$$a_1^3 + b_1^3 = 3^{2015}$$

A korábban látott módon a kitevő tovább csökkenthető 3-mal (megjegyezzük, hogy a (**)-ban belátott nagyságrend analógja továbbra is fennáll). A leredukált egyenletünk így:

$$a_{672}^3 + b_{672}^3 = 3^2 = 9,$$

amiről láthatjuk, hogy csakis az $a = 1$, $b = 2$, vagy $a = 2$, $b = 1$ oldja meg. (Ezt az egyenletet is szorzattá alakítva a (**)-ban megállapított nagyságrend éppen egyenlőséget adna.) Így a lépéseket visszafelé folytatva a megoldások éppen $a = 3^{672}$, $b = 2 \cdot 3^{672}$, vagy $a = 2 \cdot 3^{672}$, $b = 3^{672}$. Ellenőrizve láthatjuk, hogy ezek a számok tényleg megoldják az egyenletet.

Ezzel beláttuk, hogy az eredeti egyenletet csakis $p = 3$-ra lehet a megoldani, és ekkor a megoldások pontosan az $(3^{672}; 2 \cdot 3^{672})$, és $(2 \cdot 3^{672}; 3^{672})$ rendezett $(a; b)$ számpárok.

C+5. Egy 101×101-es táblázat minden mezőjébe beleírtuk a -1, 0, 1 számok valamelyikét. Mind a 101 sorban, és 101 oszlopban külön-külön felírtuk a számok összegét. Lehetséges-e, hogy a felírt számok mindegyike különböző legyen?

Megoldás: Tegyük fel, hogy kitöltöttük a táblázatot. Cserélgessük meg a sorokat, illetve az oszlopokat úgy, hogy az egyes sorok összege fentről lefele, az oszlopoké pedig balról jobbra növekedjen.

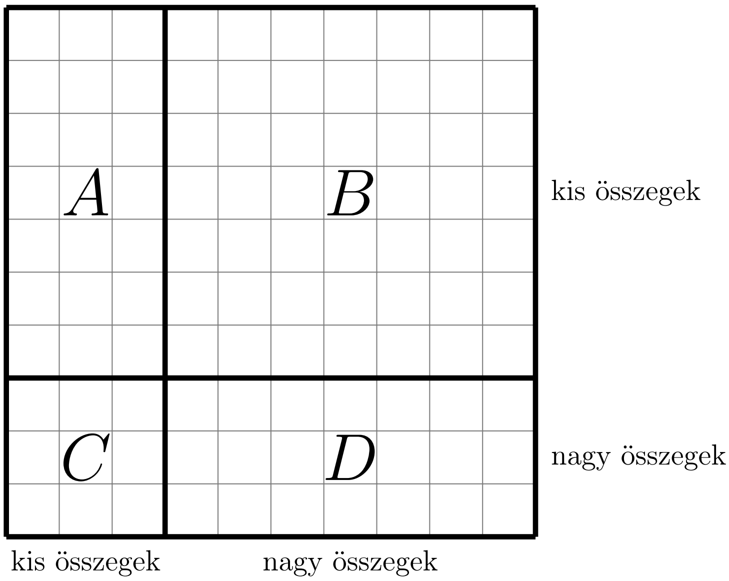
Tegyük fel, hogy az összes összeg különböző. Nézzük az összegek közül a 101 legnagyobbat, hívjuk ezeket nagy összegeknek, a többit pedig kicsinek. Nézzük, mennyi lehet a nagy és a kicsi összegek összegének különbsége.

Egyrészt párosítsuk a kis összegeket a nagy összegekkel úgy, hogy a legkisebb kis összeghez vegyük a legkisebb nagy összeget, a másodikhoz a másodikat, és így tovább. Itt minden párban legalább 101 a különbség, azaz összeségében legalább 101^2 a különbség.

Használjuk az ábra jelöléseit! A felosztott négy téglapban szereplő számok összege legyen A, B, C, D.

Azt is tudjuk, hogy a kis összegek összege $(A + B) + (A + C) = 2A + B + C$, a nagy összegek összege pedig $(B + D) + (C + D) = B + C + 2D$. Vagyis a kis és a nagy összegek különbsége $2(D - A)$. Nézzük meg, mennyi lehet ennek a kifejezésnek a maximuma.

A maximum nyilván akkor lesz, amikor a D területen az összes szám 1-es, míg az A területen az összes szám -1-es. Nézzük meg azt is, hogy maximum hány mezőből állhat az A terület. A terület $x \cdot (101 - x)$ mezőből áll. Ennek maximuma $50 \cdot 51$. Ekkor a kifejezés értéke $2(50 \cdot 51 \cdot 1 - 50 \cdot 51 \cdot (-1)) = 4 \cdot 50 \cdot 51 = 101^2 - 1$, ez pedig ellentmondás annak, hogy legalább 101^2 az értéke. Így beláttuk, hogy nem lehet ilyen módon kitölteni a táblázatot.



C+6. Játék: A játék kezdetén a korongok néhány (nem feltétlenül egyforma méretű) téglalapban lesznek elhelyezve. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás:

Definíció: A lehetséges téglalapokat soroljuk be 3 típusba oldalaik paritása szerint:

- A típusú: mindkét oldala páros;
- B típusú: egyik oldala páros, a másik páratlan;
- C típusú: mindkét oldala páratlan.

Definíció: *Nyerőállásnak* nevezzük az olyan állásokat, melyekből a soron következő játékos nyerni tud, és *vesztőállásnak* az összes többi állást.

Állítás: Egy állás pontosan akkor vesztőállás, ha benne a B típusú és C típusú téglalapok száma is páros.

Bizonyítás: A maradék korongok száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Nyilván ha 0 korong maradt, akkor a soron lévő játékos vesztett, és ez az állításunk szerint is vesztőállás, hiszen sem B, sem C típusú téglalap nincs. Most tegyük fel, hogy k-nál kisebb korongszámokra már beláttuk az állítást, és vegyünk egy olyan állást, melyben k korong van. A B és C típusú téglalapok számának paritása alapján négyféle eset lehetséges.

1. eset: Páratlan sok B típusú és páros sok C típusú téglalap van. Ekkor azt kell belátnunk, hogy ez nyerőállás, azaz létrehozható belőle vesztőállás. Mivel van legalább egy B típusú téglalapunk, az egyik ilyennek elvehetjük egy olyan szélső sorát, mely páros sok korongból áll. Ekkor a B típusú téglalap helyett csináltunk egy A típusút, azaz a B téglalapok száma eggyel csökkent, a C nem változott. Így páros sok B és páros sok C maradt, ami az indukciós feltevés szerint vesztőállásnak felel meg.

2. eset: Páros sok B típusú és páratlan sok C típusú téglalap van. Szintén azt kell belátnunk, hogy ez nyerőállás. Ha van olyan C téglalap, aminek egyik oldala 1, akkor az egész téglalap elvehető egy lépésben, ezáltal páros sok C típusú téglalap marad, a másik két típus mennyisége nem változik, így az indukciós feltevés miatt vesztőálláshoz jutunk. Ha pedig nincs ilyen, akkor viszont olyat találunk, melynek egyik oldala legalább 3. Tehát van egy m sorból és n oszlopból álló téglalap, melyben m és n páratlan, és $m \geq 3$. Ekkor a téglalap második oszlopát elvéve, kapunk egy $m \times 1$-es és egy $m \times (n-2)$-es téglalapot. Mindkét kapott téglalap C típusú, így összességében a C típusú téglalapok száma eggyel nőtt, azaz páros lett. A többi típus darabszáma nem változott, így páros sok B és páros sok C lett, ami vesztőállást jelent.

3. eset: Páratlan sok van B és C típusú téglalapból is. Megint azt kell belátnunk, hogy ez nyerőállás. Ekkor vegyünk el az egyik B típusú téglalapból egy páratlan hosszú szélső sort. Ekkor a maradék téglalap mindkét oldala páratlan lesz, azaz egy B típusú téglalap átalakult egy C típusúvá. Így a B és C típusúak számának paritása is változott, azaz B és C típusú téglalapból is páros sok lett, ami az indukciós feltevés alapján vesztőállás.

4. eset: Páros sok van B és C típusú téglalapból is. Azt akarjuk belátni, hogy ez vesztőállás, azaz bármit lépünk, nyerőálláshoz jutunk. Az alábbi táblázat felsorolja a potenciális lépéseket. A ΔA, ΔB, ΔC oszlopok mutatják az egyes típusú téglalapok darabszámainak változását a lépések hatására.

Mihez nyúlunk?	Ennek a méretei	Mit veszünk el?	Maradék téglalap(ok) méretei	ΔA	ΔB	ΔC
A	$2k \times 2l$	1. sor	$(2k-1) \times 2l$	-1	+1	0
A	$2k \times 2l$	$2x$. sor	$(2x-1) \times 2l$ és $(2k-2x) \times 2l$	0	+1	0
A	$2k \times 2l$	$2x+1$. sor	$2x \times 2l$ és $(2k-2x-1) \times 2l$	0	+1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	1. páros sor	$2k \times 2l$	+1	-1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x$. páros sor	$(2x-1) \times 2l$ és $(2k-2x+1) \times 2l$	0	+1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x+1$. páros sor	$2x \times 2l$ és $(2k-2x) \times 2l$	+2	-1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	1. páratlan sor	$(2k+1) \times (2l-1)$	0	-1	+1
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x$. páratlan sor	$(2k+1) \times (2x-1)$ és $(2k+1) \times (2l-2x)$	0	0	+1
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x+1$. páratlan sor	$(2k+1) \times 2x$ és $(2k+1) \times (2l-2x-1)$	0	0	+1
C	$(2k+1) \times (2l+1)$	1. sor	$2k \times (2l+1)$	0	-1	+1
C	$(2k+1) \times (2l+1)$	$2x$. sor	$(2x-1) \times (2l+1)$ és $(2k-2x) \times (2l+1)$	0	+1	0
C	$(2k+1) \times (2l+1)$	$2x+1$. sor	$2x \times (2l+1)$ és $(2k-2x-1) \times (2l+1)$	0	+1	0

Látjuk, hogy bármit lépünk, a B vagy a C típusú téglalapok számának paritása változni fog, azaz nem kaphatunk újra vesztőállást.

Azaz az állításunkat beláttuk, és stratégiánk is van, hiszen minden nyerőállásban mutattunk egy olyan lépést, ami vesztőállást hagy maga után.