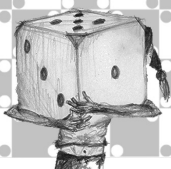


Döntő
2018. február 9.



XI. Dürer Verseny Matematika kifejtős

9-10. osztályosok



1. Bizonyítsátok be, hogy bármely négyszögnek kiválasztható két szomszédos oldala, amelyeket paralelogrammává kiegészítve a kapott paralelogramma tartalmazza az eredeti négyszöget.
2. $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el, hogy $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ és $CA \parallel C'A'$, és ezen párhuzamos oldalak egymástól d távolságra vannak mindhárom esetben. Legyenek O és O' az ABC és $A'B'C'$ beírt köreinek középpontjai, K és K' pedig a köréírt köreinek középpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az O , O' , K és K' pontok egy egyenesen vannak.
3. Egy bolha ugrál egy 120 cm kerületű körön. Mindig az óramutató járásával megegyező irányban ugrik, összesen 120-szor. Ugrásainak hossza a kör kerületén mérve 1 cm, 2 cm, ..., 119 cm, 120 cm, nem feltétlenül ebben a sorrendben.
 - a) Hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet a bolha egy ilyen ugrássorozat során?
 - b) Ha ugyanezen a körön 60-szor ugrik a bolha úgy, hogy ugrásainak hossza valamilyen sorrendben 1 cm, 2 cm, ..., 59 cm, 60 cm, akkor hány cm hosszú a leghosszabb körív, amelyet elkerülhet?
4. Keressétek meg az $a^3 + b^3 = p^{2018}$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol a és b pozitív egészek, p pedig prímszám.
5. Egy 101×101 -es táblázat minden mezőjébe beleírtuk a -1 , 0 , 1 számok valamelyikét. Mind a 101 sorban, és 101 oszlopban külön-külön felírtuk a számok összegét. Lehetséges-e, hogy a felírt számok mindegyike különböző legyen?
6. **Játék:** A játék kezdetén a korongok néhány (nem feltétlenül egyforma méretű) téglalapban lesznek elhelyezve. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalaprak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk:

a XI. Dürer Verseny szervezői