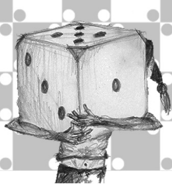
Döntő
2018. február 9.



XI. Dürer Verseny
Matematika kifejtős
11-12. osztályosok

D kategória

---

1. Igaz-e, hogy egy olyan nyolcszögben, amelynek semelyik 3 csúcsa sem esik egy egyenesre, mindig van olyan átló, amely a nyolcszöget két ötszögre bontja?

2. 25 gyerek mindegyike szeret legalább egy ételt a spenót, a finomfőzelék, a paradicsomos káposzta és a brokkoli közül. Tudjuk, hogy bármely 4 gyerekhez lehet találni olyan ételt a 4 közül, amelyet közülük valaki szeret és valaki nem. Bizonyítsátok be, hogy van két olyan gyerek, akik közül az egyik pontosan azokat az ételeket szereti, amelyeket a másik nem.

3. a) Adjatok meg 5 pozitív egész számot úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
b) Bizonyítsátok be, hogy bármilyen n pozitív egészre megadható n darab pozitív egész szám úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
c) Megadható-e ugyanezen feltétellel végtelen sok pozitív egész szám?

4. $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el, hogy $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ és $CA \parallel C'A'$, és ezen párhuzamos oldalak egymástól d távolságra vannak mindhárom esetben. Legyenek O és O' az ABC és $A'B'C'$ beírt köreinek középpontjai, K és K' pedig a köréírt köreinek középpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az O, O', K és K' pontok egy egyenesen vannak.

5. Keressétek meg az $a^3 + b^3 = p^{2018}$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol a és b pozitív egészek, p pedig prímszám.

6. Játék: A játék kezdetén egy $n \times k$-as téglalap minden mezőjére teszünk egy-egy korongot. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol. Kezdetben csak egy ilyen téglalap van, később már lehet hogy több is.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás (azaz n és k) ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XI. Dürer Verseny szervezői