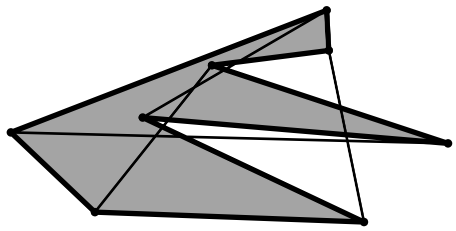
D1. Igaz-e, hogy egy olyan nyolcszögben, amelynek semelyik 3 csúcsa sem esik egy egyenesre, mindig van olyan átló, amely a nyolcszöget két ötszögre bontja?

Megoldás: Ha egy nyolcszöget kettévágunk egy átlójával, akkor legalább 10 csúcs keletkezik (az eredeti nyolc, plusz még kettő az elvágásnál). Ezért, ha pontosan két ötszöget szeretnénk, akkor a nyolcszög kerületén 3-3 csúcs kell az átló két oldalán, tehát a négy főátló valamelyikét kell választani.



Az ábrán látható nyolcszög tehát egy ellenpélda, mert a négy főátlójának egyike sem bontja két ötszögre.

D2. 25 gyerek mindegyike szeret legalább egy ételt a spenót, a finomfőzelék, a paradicsomos káposzta és a brokkoli közül. Tudjuk, hogy bármely 4 gyerekhez lehet találni olyan ételt a 4 közül, amelyet közülük valaki szeret és valaki nem. Bizonyítsátok be, hogy van két olyan gyerek, akik közül az egyik pontosan azokat az ételeket szereti, amelyeket a másik nem.

Megoldás: Négyféle étel szerepel a feladatban. Ez alapján 16-féle ízlésű gyerek létezhet, hiszen minden ételről külön-külön eldöntheti valaki, hogy szereti vagy nem, ez $2^4 = 16$ lehetőség. Az azonos ízlésű gyerekek halmazát nevezzük *ízlés-csoportnak*. Azt is tudjuk, hogy bármely 4 gyerekhez lehet találni olyan ételt a 4 közül, amit közülük valaki szeret és valaki nem. Ez alapján minden ízlés-csoportban legfeljebb három gyerek lehet.

A 16-féle ízlés-csoportot rendezzük komplementer párokba, egy ízlés-csoport komplemenetere az az ízlés-csoport, amely mindenről pont ellentétesen vélekedik. Például a csak a spenótot szeretők csoportjának komplementere az a csoport, akik a spenótot nem, de a finomfőzeléket, a paradicsomos káposzát és a brokkolit szeretik. A mindent szeretők komplementere a semmit sem szeretők csoportja, a feladat feltételei szerint a semmit sem szeretők csoportja üres.

A 16 ízlés-csoportot így 8 párra (halmazra) osztottuk szét. A skatulyaelv alapján $25 = 3 \cdot 8 + 1$ gyerek közül lesz négy, aki azonos halmazba esik. A teljesen azonos ízlésűekből legfeljebb 3 lehet, így van két olyan gyerek, akik komplementer ízlésűek, azaz egyikük éppen azokat az ételeket szereti, amit a másik nem.

D3. **a)** Adjatok meg 5 pozitív egész számot úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
b) Bizonyítsátok be, hogy bármilyen n pozitív egészre megadható n darab pozitív egész szám úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
c) Megadható-e ugyanezen feltétellel végtelen sok pozitív egész szám?

Megoldás: a) rész: Könnyen ellenőrizhető, hogy például a 24, 48, 72, 96, 120 számok megfelelnek a feltételeknek.

Megoldás a b) részre: Az i-edik szám ($1 \leq i \leq n$) legyen $i \cdot n!$. Ha $1 \leq i < j \leq n$, akkor a j-edik és i-edik szám különbsége $(j-i) \cdot n!$ míg a szorzatuk $i \cdot j \cdot (n!)^2$. Az $n!$-nak nyilván osztója $j - i$, így $(j-i) \cdot n!$ osztója $(n!)^2$-nek és így persze $i \cdot j \cdot (n!)^2$-nek is. Tehát a j-edik és i-edik szám különbsége osztja a szorzatukat.

Második megoldás a b) részre: Teljes indukcióval bizonyítunk. Két számot meg tudunk adni, például $1, 2$ jó lesz. Tegyük fel, hogy k számot már megadtunk, ezek legyenek $a_1, \ldots, a_k$. Legyen n egy pozitív egész szám, ami nagyobb mindegyik a_i-nél és tekintsük a

$$\frac{n \cdot a_i}{n - a_i} = \frac{p_i}{q_i},\ (p_i, q_i) = 1,\ 1 \leq i \leq k$$

törteket. Legyen $Q = \prod_{j=1}^{k} q_j$, $b_i = a_i \cdot Q$ és $b_{k+1} = n \cdot Q$. Ha $a_i - a_j | a_i a_j$, akkor nyilván $Qa_i - Qa_j | Qa_i Qa_j$, tehát $b_1, \ldots, b_k$ továbbra is teljesíti a feltételt. Továbbá

$$\frac{b_{k+1} \cdot b_i}{b_{k+1} - b_i} = \frac{Q \cdot n \cdot Q \cdot a_i}{Q \cdot n - Qa_i} = \frac{Q \cdot na_i}{n - a_i},$$

ami Q választása miatt egész szám. Tehát $b_1, \ldots, b_{k+1}$ megfelelő választás. Így valóban minden k-ra meg tudunk adni k db megfelelő számot.

Megoldás a c) részre Nem adható meg végtelen sok. Tegyük fel indirekt, hogy mégis, és legyen a végtelen sok szám: $a_1 < a_2 < \cdots$. Ekkor minden $k > 1$ esetén $a_k - a_1 \mid a_1 \cdot a_k$. Az oszthatóságból következik, a nyilvánvaló $(a_k - a_1) \cdot a_1 < a_k \cdot a_1$ becslést felhasználva, hogy

$$a_k \cdot a_1 \geq (a_k - a_1) \cdot (a_1 + 1) = a_k \cdot a_1 + a_k - (a_1)^2 - a_1.$$

Innen azonban $(a_1)^2 + a_1 \geq a_k$ adódik. Mivel $k > 1$ tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy legfeljebb $(a_1)^2 + a_1$ darab számunk lehet (mivel azok pozitív egészek), ellentmondásban azzal, hogy végtelen sok van.

Második megoldás a c) részre Tegyük fel, hogy meg tudunk adni végtelen sok számot. Ezek közül a legkisebbet jelölje a, ekkor biztosan lesz a kiválaszott számok között egy olyan b szám, amire $b > a^2 + a$ teljesül. Nyilván

$$(b, b-a) = (b, a) \leq a \quad \text{valamint} \quad (a, b-a) \leq a.$$

Mivel

$$(ab, b-a) \leq (a, b-a) \cdot (b, b-a) \leq a^2 < b - a,$$

így $b - a \nmid ab$, ellentmondás.

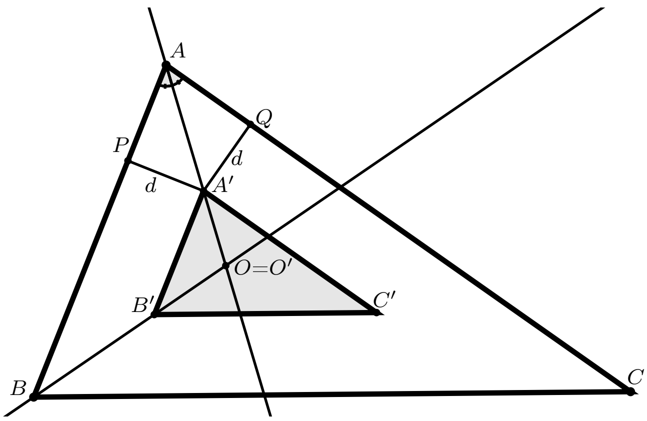
Második megoldás a c) részre Tegyük fel, hogy van számok végtelen sorozata, (a_n) ami teljesíti a feltételt. Legyen k a sorozat egyik tagja, ekkor a sorozat minden egyes $a_i \neq k$ tagjára a $a_i k / a_i - k$ egész. Mivel

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k \cdot x}{x - k} = k,$$

és $\dfrac{kx}{x-k} > k$, ha $x > k$, emiatt létezik egy olyan N szám, melyre ha $x > N$, akkor $k < \dfrac{kx}{x-k} < k + 1$, vagyis akkor a hányados nem egész. Vagyis ha $a_i > N$, akkor $\dfrac{a_i \cdot k}{a_i - k}$ nem egész, így a sorozatnak csak véges sok olyan a_i tagja van, amire $\dfrac{a_i \cdot k}{a_i - k}$ egész, ami ellentmondás.

D4. $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el, hogy $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ és $CA \parallel C'A'$, és ezen párhuzamos oldalak egymástól d távolságra vannak mindhárom esetben. Legyenek O és O' az ABC és $A'B'C'$ beírt köreinek középpontjai, K és K' pedig a köréírt köreinek középpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az O, O', K és K' pontok egy egyenesen vannak.

Megoldás:



1. Lemma: AA', BB' és CC' egy ponton mennek át.

1. lemma bizonyítása:
$ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ hasonlóak és a megfelelő oldalaik párhuzamosak, tehát van egy olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi. Ez az X középpontú hasonlóság, mivel a megfelelő oldalakat megfelelő oldalakba viszi, így a megfelelő csúcsokat is megfelelő csúcsokba, tehát az A, A', X pontok egy egyenesre esnek, hasonlóan B, B', X és C, C', X pontok is, tehát AA', BB', CC' egy ponton mennek át.

2. Lemma: $X = O$.

2. lemma bizonyítása: A'-ből merőlegeseket véve AB és AC oldalakra, ha a merőlegesek talppontjai P és Q, akkor $A'P = A'Q = d$ a feladat feltétele miatt. Ebből következik, hogy $APA'\triangle$ és $AQA'\triangle$ egybevágóak, mivel két oldaluk hossza és a megfelelő szögük megegyezik, tehát $PAA'\sphericalangle = QAA'\sphericalangle$, azaz AA' a $PAQ\sphericalangle = BAC\sphericalangle$ szögfelezője, ami $ABC\triangle$-ben szögfelező. Ugyanez elmondható BB' illetve CC'-ről, így mindhárom egyenes átmegy O-n. Mivel a három egyenes különböző (hisz bármely $ABC\triangle$-ben a szögfelezők különböznek), így legfeljebb egy közös metszéspontjuk lehet, és O az. Tehát $X = O$.

3. Lemma: $O = O'$.

3. lemma bizonyítása: Mivel O-ból egymásba lehet vinni a két háromszöget középpontos hasonlósággal, ezért O az $ABC\triangle$ beírt körét is $A'B'C'\triangle$ beírt körébe viszi, és a középpontját középpontba. Mivel az előző körnek O a középpontja, így a másiknak is O lesz, hiszen önmagából egy pontra tetszőleges középpontos hasonlóságot elvégezve önmagát kapjuk. Tehát $O' = O$.

Ugyanígy, a megfelelő középpontos hasonlóság K-t K'-be viszi, tehát O, K, K' egy egyenesre esik. Viszont $O = O'$. Ezzel az állítást beláttuk.

A megoldás diszkussziót nem igényel.

D5. Keressétek meg az $a^3+b^3=p^{2018}$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol a és b pozitív egészek, p pedig prímszám.

Megoldás: Alakítsuk szorzattá a az egyenlet bal oldalát:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=p^{2018} \tag{1}$$

Mivel p prímszám, ezért p^{2018} csakis úgy állhat elő szorzatalakban, ha

$$a+b = p^n \tag{2}$$

$$a^2-ab+b^2 = p^{2018-n} \tag{3}$$

ahol $0 \leq n \leq 2018$.

Tudjuk, hogy a és b pozitív egész számok, ezért $a+b>1$, és így $n \neq 0$. Az is könnyen megmutatható, hogy $n \neq 2018$. Ehhez az $a^2-ab+b^2=1$ egyenletet kell megoldani. Átrendezve kapnánk ebből, hogy

$$(a-b)^2=1-ab$$

Az egyenlet bal oldala nemnegatív (egy egész szám négyzete), a jobb oldal pedig nempozitív, hiszen a, $b>0$. Egyenlőség így csak akkor állhat fenn, ha $a=b=1$. Ekkor viszont $p^{2018}=2$, ami nem lehetséges. Tehát $0<n<2018$. (*)

A (2) egyenlet négyzetéből kivonva a (3) egyenletet kapjuk, hogy

$$3ab=p^{2n}-p^{2018-n}=p^{2018-n}(p^{3n-2018}-1) \tag{4}$$

(Itt leszögezzük, hogy a (2) egyenlet négyzete szigorúan nagyobb a (3) egyenletnél.)

Mivel $n<2018$, ezért p osztja a (4) egyenlet jobb oldalát, tehát a bal oldalt is kénytelen osztani. A bal oldal egy szorzat, ezért $p \mid 3$, $p \mid a$, vagy $p \mid b$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy mindenképpen $p \mid 3$. Ha ugyanis $p \mid a$, akkor az $a^3+b^3=p^{2018}$ egyenlet miatt itt $p \mid b$, valamint ezek alapján a két szám felírható $a=pa_1$, valamint $b=pb_1$ alakban. Az eredeti egyenletbe behelyettesítve, majd p^3-nal egyszerűsítve

$$a_1^3+b_1^3=p^{2015}$$

Az így kapott egyenletet az eredeti analógiájára vizsgálhatjuk: az előbb alkalmazott lépéseket újra használva az egyenletben szereplő p kitevője 3-mal ismét csökkenthető. A megoldandó egyenlet így ezen lépések sorozatával leredukálható a következő alakra:

$$a_{672}^3+b_{672}^3=p^2 \tag{5}$$

(Fontos megjegyezni, hogy a fent (*)-gal jelölt megállapítás ezekre a csökkentett kitevőkre átfogalmazott analóg állításokra is igaz.)

Ezt is szorzattá alakítva, felállítva az új egyenletrendszert, majd a műveleteket hasonlóan elvégezve kapjuk, hogy

$$3a_{672}b_{672}=p(p-1)$$

Ha itt p osztaná a_{672}, vagy b_{672} valamelyikét, akkor az azt jelentené, hogy az (5) egyenlet bal oldala p^3-nal osztható lenne, viszont a jobb oldal (p^2) nem osztható p^3-nal, így ez nem lehet. Következésképpen muszáj, hogy $p \mid 3$, ami azt jelenti, hogy $p=3$.

Ezt az eredményt visszaírva a (4) egyenletbe:

$$3ab = 3^{2018-n}(3^{3n-2018} - 1) \tag{6}$$

Azt fogjuk belátni, hogy $2018-n \geq 2$. Ha $n = 2018$, akkor a már korábban megnézett $a^2-ab+b^2 = 1$ egyenletet kellene megoldanunk (amiről korábban láttuk, hogy nem lehet), $n = 2017$ esetén pedig a $a^2 - ab + b^2 = 3$ egyenletet. Ezt átalakítva $(a - b)^2 = 3 - ab$, aminek csak $a = 1$, $b = 2$, vagy $a = 2$, $b = 1$ a megoldása. Ekkor viszont nem igaz az $1^3 + 2^3 = 3^{2018}$ egyenlet. Tehát valóban $2018 - n \geq 2$. (**)

Ez viszont azt jelenti, hogy 9 osztja a (6) egyenlet jobb oldalát, így a bal oldalt is osztania kell, tehát a szimmetria miatt feltehető, hogy $3 \mid a$. Ekkor viszont $a^3 + b^3 = p^{2018}$ miatt $3 \mid b$. A korábbi felírásokkal élve $3^3 = 27$-tel elosztva az egyenletet kapjuk, hogy

$$a_1^3 + b_1^3 = 3^{2015}$$

A korábban látott módon a kitevő tovább csökkenthető 3-mal (megjegyezzük, hogy a (**)-ban belátott nagyságrend analógja továbbra is fennáll). A leredukált egyenletünk így:

$$a_{672}^3 + b_{672}^3 = 3^2 = 9$$

amiről láthatjuk, hogy csakis az $a = 1$, $b = 2$, vagy $a = 2$, $b = 1$ oldja meg. (Ezt az egyenletet is szorzattá alakítva a (**)-ban megállapított nagyságrend éppen egyenlőséget adna.) Így a lépéseket visszafelé folytatva a megoldások éppen $a = 3^{672}$, $b = 2 \cdot 3^{672}$, vagy $a = 2 \cdot 3^{672}$, $b = 3^{672}$. Ellenőrizve láthatjuk, hogy ezek a számok tényleg megoldják az egyenletet.

Ezzel beláttuk, hogy az eredeti egyenletet csakis $p = 3$-ra lehet a megoldani, és ekkor a megoldások pontosan az $(3^{672}; 2 \cdot 3^{672})$, és $(2 \cdot 3^{672}; 3^{672})$ rendezett $(a; b)$ számpárok.

D6. **Játék:** A játék kezdetén egy $n \times k$-as téglalap minden mezőjére teszünk egy-egy korongot. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol. Kezdetben csak egy ilyen téglalap van, később már lehet hogy több is.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás (azaz n és k) ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Ha a téglalapnak mindkét oldala páros, akkor a Második nyer, ha pedig van páratlan oldala, akkor a Kezdő.

Van páratlan oldal: Tegyük fel, hogy $(2\ell + 1) \times r$-es a téglalap, ahol ℓ egész. Ekkor a Kezdő játékos nyerni tud úgy, hogy elveszi a középső sort, azaz két darab $\ell \times r$-es téglalapot hagy maga után. Ugyanis innentől kezdve Kezdő tekintheti úgy a pályát, mintha az két egyforma pályarészből állna, és ekkor akármit lép Második az egyik játékrészben, azt Kezdő a másik játékrészben le tudja utánozni, ilyen módon pedig garantált, hogy Kezdő fog utoljára lépni.

Mindkét oldal páros: Ekkor a Második játékos tud nyerni. Ugyanis ha a tábla közepére Második odaképzel egy zöld pöttyöt (a középső 4 mező közé), akkor bármit lépjen Kezdő, azt Második le tudja utánozni úgy, hogy a zöld pöttyre tükrözve lépi meg ugyanazt. Meggondolható, hogy bármely lépésnek így a tükörképét végre tudja hajtani, például egy lépés tükörképe mindig csak vele diszjunkt mezőket fog tartalmazni.

D+1. **a)** Bizonyítsátok be, hogy bármilyen n pozitív egészre megadható n darab pozitív egész szám úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata osztható legyen a különbségükkel.
b) Megadható-e ugyanezen feltétellel végtelen sok pozitív egész szám?

Megoldás: Lásd a **D3** feladat megoldását.

D+2. **a)** Bizonyítsátok be, hogy ha az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$f(f(g(x))) = g(f(f(x))) = x$$

teljesül minden valós x esetén, akkor $f(g(f(x))) = x$ is teljesül minden valós x esetén.
b) Igaz-e, hogy ha az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$f(f(g(x))) = g(f(f(x))) = 2x$$

teljesül minden valós x esetén, akkor $f(g(f(x))) = 2x$ is teljesül minden valós x esetén?

Megoldás: **a)** A feltételek ügyes sorrendben való alkalmazásával:

$$f(g(f(x))) = f(g(f(f(f(g(x)))))) = f(f(g(x))) = x.$$

Az első és a harmadik egyenlőségnél az $f(f(g(x))) \equiv x$, míg a második egyenlőségnél az $g(f(f(x))) \equiv x$ feltételt alkalmaztuk.

b) Az állítás hamis, egyszerű ellenpéldát szolgáltatnak az

$$f(x) = 1 - x \quad \text{és} \quad g(x) = 2x.$$

függvények. Mivel $f(f(x)) = 1 - f(x) = x - 1 + 1 = x$ (minden x-re), így teljesülnek a feltételek. De $f(g(f(x))) = f(2 - 2x) = 2x - 1$, így az sosem teljesül, hogy $f(g(f(x))) = 2x$.

2. Megoldás: Jelöljük tetszőleges f és g függvények esetén $f \circ g$-vel az $x \mapsto f(g(x))$ függvényt. Az $f(x) \equiv x$ identitásfüggvényt röviden id-vel jelöljük.

A feladat megoldásának kulcsa a következő lemma alapos megértése.

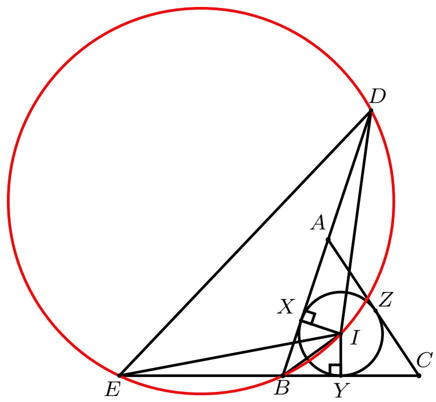
Lemma: Legyen H tetszőleges halmaz és $k, \ell : H \to H$ függvények. Ekkor ha ℓ *bijektív* (azaz kölcsönösen egyértelmű) és $k \circ \ell$ az identitás, akkor $\ell \circ k$ is az identitás.

A lemma bizonyítása: Legyen a tetszőleges valós szám és legyen $b = k(a)$. Mivel ℓ bijektív, egyértelműen létezik egy olyan b' szám, amelyre $\ell(b') = a$, de erre $b' = \mathrm{id}(b') = k(\ell(b')) = k(a) = b$. Következésképpen a tetszőlegesen választott a számunkra $\ell(k(a)) = \ell(b) = a$. □

Megjegyzés: A lemma így is fogalmazható: egy bijektív függvény minden balinverze egyben jobbinverze is. Könnyű belátni, hogy ilyen „kétoldali” inverz egyértelműen létezik minden bijektív függvényhez, ezt szoktuk egyszerűen inverzfüggvénynek nevezni, ezt szoktuk így jelölni: ℓ^{-1}.

A lemmát a $k = g \circ f$ és $\ell = f$ függvényekre alkalmazva rögtön adódik az **a)** bizonyítása. Még be kell látnunk a lemma azon feltételét, hogy $\ell = f$ bijektív. Ha f nem lenne injektív, akkor $g \circ f \circ f$ sem lehetne az (hiszen ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $x_1 = g(f(f(x_1))) = g(f(f(x_2))) = x_2$ is teljesül); míg ha f nem volna szürjektív, akkor $f \circ f \circ g$ sem lehetne az (hiszen ami f értékkészletéből hiányzik, az $f \circ f \circ g$ értékkészletéből is).

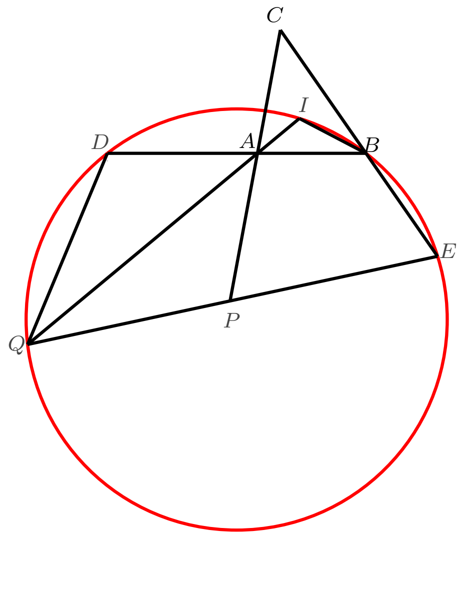
D+3. Adott egy ABC háromszög. Legyen D az AB szakasz A-n túli meghosszabbításán úgy, hogy $AD = BC$, az E pedig a BC szakasz B-n túli meghosszabbításán úgy, hogy $BE = AC$. Bizonyítsátok be, hogy a DEB háromszög köréírt köre átmegy az ABC háromszög beírt körének középpontján.



Megoldás: Legyen a beírt kör középpontja I, és érintse $ABC\triangle$ beírt köre az oldalakat X, Y, Z pontokban ($X \in AB$, $Y \in BC$, $Z \in CA$).

A feladat feltételeit kihasználva, illetve hogy pontból körhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak, kapjuk: $DX = DA + AX = BC + AZ = BY + YC + AZ = BY + AZ + ZC = BY + AC = BY + EB = EY$. Mivel IY és IX is sugár a beírt körben, így $IY = IX$, tehát $EYI\triangle \cong DXI\triangle$ mert 2 oldaluk hossza és a bezárt szögük megegyezik (EY Y pontban érinti a beírt kört és YI a beírt körnek egy sugara, ugyanez igaz DX és XI-re). Tehát E és D ugyanakkora szögből látja BI szakaszt, így ugyanakkora szögű látókörívén vannak rajta (Diszkusszió, hogy ugyan azon az oldalon vannak), tehát $DEBI$ húrnégyszög, avagy I rajta van DEB köréírt körén. Diszkusszió: BI-nek A a C-vel átellenes oldalán van, hiszen BI egyenes AC-t metszi. D az a BI egyenesnek az A-val azonos oldalán van, így a C-vel átellenesen, és E is a C-vel átellenes oldalon van, hiszen BI az EC szakaszt B-ben metszi.

2. Megoldás: Vegyük fel a P pontot a CA oldal A-n túli meghosszabításán úgy, hogy $PA = CB$ legyen. Legyen $Q = AI \bigcap EP$, és éljünk a szokásos jelölésekkel.



AI és BI szögfelezők, így könnyen kiszámolható, hogy $AIB\angle = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Továbbá, mivel $PA = CB$ és $AC = BE$, így $PA + AC = PC = CB + BE = CE$, tehát $PCE\triangle$ egyenlő szárú, avagy $EPC\angle = CEP\angle = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Ezen két szög összege $180°$, tehát $EBIQ$ négyszög húrnégyszög.

Mivel $EPC\angle = 90° - \frac{\gamma}{2}$, így $APD\angle = 90° + \frac{\gamma}{2}$, illetve mivel $DA = AP (= CB)$, és AQ szögfelezője $DAP\angle$-nek, így $DAQ\triangle \equiv PAQ\angle$ mert két oldaluk és bezárt szögük megegyezik, ezért $QDA\angle = APD\angle = 90° + \frac{\gamma}{2} = 180° - BEQ\angle$, tehát $EBDQ$ is húrnégyszög.

Ezekből következik hogy E, B, I, D, Q egy körön vannak, ami $EBD\triangle$ köréírt köre, amin rajta van így I. Ezzel az állítást beláttuk.

D+4. Egy 101×101-es táblázat minden mezőjébe beleírtuk a -1, 0, 1 számok valamelyikét. Mind a 101 sorban, és 101 oszlopban külön-külön felírtuk a számok összegét. Lehetséges-e, hogy a felírt számok mindegyike különböző legyen?

Megoldás: Tegyük fel, hogy kitöltöttük a táblázatot. Cserélgessük meg a sorokat, illetve az oszlopokat úgy, hogy az egyes sorok összege fentről lefele, az oszlopoké pedig balról jobbra növekedjen.

Tegyük fel, hogy az összes összeg különböző. Nézzük az összegek közül a 101 legnagyobbat, hívjuk ezeket nagy összegeknek, a többit pedig kicsinek. Nézzük, mennyi lehet a nagy és a kicsi összegek összegének különbsége.

Egyrészt párosítsuk a kis összegeket a nagy összegekkel úgy, hogy a legkisebb kis összeghez vegyük a legkisebb nagy összeget, a másodikhoz a másodikat, és így tovább. Itt minden párban legalább 101 a különbség, azaz összeségében legalább 101^2 a különbség.

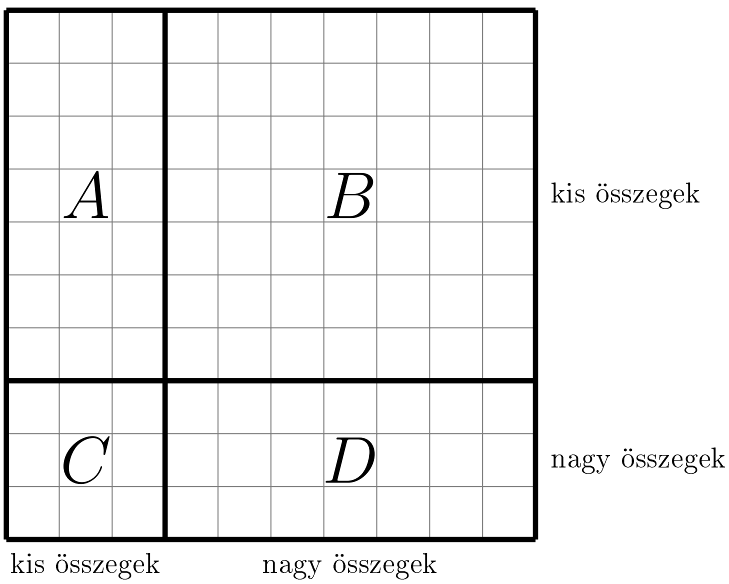
Használjuk az ábra jelöléseit! A felosztott négy téglapban szereplő számok összege legyen A, B, C, D.

Azt is tudjuk, hogy a kis összegek összege $(A + B) + (A + C) = 2A + B + C$, a nagy összegek összege pedig $(B + D) + (C + D) = B + C + 2D$. Vagyis a kis és a nagy összegek különbsége $2(D - A)$. Nézzük meg, mennyi lehet ennek a kifejezésnek a maximuma.

A maximum nyilván akkor lesz, amikor a D területen az összes szám 1-es, míg az A területen az összes szám -1-es. Nézzük meg azt is, hogy maximum hány mezőből állhat az A terület. A terület $x \cdot (101 - x)$ mezőből áll. Ennek maximuma $50 \cdot 51$. Ekkor a kifejezés értéke

$$2(50 \cdot 51 \cdot 1 - 50 \cdot 51 \cdot (-1)) = 4 \cdot 50 \cdot 51 = 101^2 - 1,$$

ez pedig ellentmond annak, hogy legalább 101^2 az értéke. Így beláttuk, hogy nem lehet ilyen módon kitölteni a táblázatot.



D+5. Legyen p pozitív prímszám, a, b, c pedig p-vel nem osztható egészek, és legyen

$$S_p(a,b,c) = \{n \in \mathbb{N} : n < p,\ p \mid a^n + b^n + c^n\}.$$

a) Legyen p olyan prímszám, melyre $\frac{p-1}{2}$ is prím. Mutassátok meg, hogy ekkor bármilyen a, b, c esetén

$$|S_p(a,b,c)| < 1 + \sqrt{2p}.$$

b) Mutassátok meg, hogy végtelen sok p-hez léteznek alkalmas a, b, c számok, melyekre

$$|S_p(a,b,c)| > \frac{p}{2}.$$

Megoldás: a) Először nézzük meg azt az esetet, ha $b \equiv \pm a \pmod p$ és $c \equiv \pm a \pmod p$. Ekkor $a^n + b^n + c^n \equiv 3a^n$ vagy $\pm a^n$, vagyis sose lesz 0, hiszen $p \nmid a$ és $p \neq 3$ (ugyanis $\frac{3-1}{2} = 1$ nem prím). Tehát ekkor készen vagyunk. A továbbiakban feltehetjük, hogy például $b \not\equiv \pm a \pmod p$, vagyis $ab^{-1} \not\equiv \pm 1 \pmod p$.

Legyen $q = \frac{p-1}{2}$. Modulo p egy elem rendje lehet $1, 2, q, 2q$. Mivel $ab^{-1} \not\equiv \pm 1 \pmod p$, így rendje nem lehet 1 vagy 2, tehát q vagy $2q$ lesz.

Használjuk a rövdiebb $S = S_p(a,b,c)$ jelölést. Legyen továbbá

$$S_t = \{(i,j) \in S \times S : i - j \equiv t \pmod{p-1}\}.$$

Most belátjuk, hogy ha $1 \leq t \leq 2q-1$, és $t \neq q$, akkor $|S_t| \leq 2$.

Legyen $(i,j) \in S_t$. Ekkor

$$0 \equiv (a^j + b^j + c^j) - c^{j-i}(a^i + b^i + c^i) \equiv (a^{j-i} - c^{j-i})a^i + (b^{j-i} - c^{j-i})b^i \pmod p.$$

Azaz

$$a^i(a^t - c^t) \equiv b^i(c^t - b^t) \pmod p.$$

Ha $a^t \equiv c^t \pmod p$ teljesülne, akkor $c^t \equiv b^t \pmod p$ is, vagyis $(ab^{-1})^t \equiv 1 \pmod p$ lenne. De ab^{-1} rendje q vagy $2q$, tehát ebből következne, hogy $t \mid q$, ám ezt kizártuk. Vagyis átrendezhetjük:

$$(ab^{-1})^i \equiv (c^t - b^t)(a^t - c^t)^{-1} \pmod p.$$

Rögzített t esetén a jobb oldal állandó, tehát azt keressük, hány i-re veheti fel ezt az értéket a bal oldal. Ám ab^{-1} rendje q vagy $2q$, így míg i befutja az $1, 2, \ldots 2q-1$ számokat, $(ab^{-1})^i$ bármilyen értéket maximum kétszer vehet fel. Ezzel beláttuk, hogy ha $1 \leq t \leq 2q-1$, és $t \neq q$, akkor $|S_t| \leq 2$.

Így

$$|S|^2 = \left| \bigcup_{0 \leq t \leq 2q-1} S_t \right| = |S_0| + \sum_{t=1}^{q-1} |S_t| + |S_q| + \sum_{t=q+1}^{2q-1} |S_t| \leq 2|S| + 2(p-2),$$

hiszen $|S_0| = |S|$, $|S_q| \leq |S|$, a többi pedig a lemma miatt $|S_t| \leq 2$. Ezt átrendezve:

$$(|S| - 1)^2 \leq 2p - 3,$$

azaz

$$|S| \leq \sqrt{2p-3} + 1 < \sqrt{2p} + 1.$$

b) Legyen $p = 6k+1$ alakú. Ekkor az $x^3 \equiv 1 \pmod p$ egyenletnek 3 különböző (azaz inkongruens) megoldása van, legyenek ezek a, b, c. Ha g primitív gyök modulo p, akkor könnyen látható, hogy $a \equiv 1$, $b \equiv g^{2k}$, $c \equiv g^{4k}$ ilyenek. Továbbá teljesül, hogy $1 + b + c \equiv 1 + g^{2k} + g^{4k} \equiv \frac{g^{6k}-1}{g^{2k}-1} \equiv 0$, hiszen $g^{2k} \not\equiv 1$. Szintén fennáll, hogy $b^2 \equiv c$ és $c^2 \equiv b$.

Megmutatjuk, hogy ekkor $|S_p(a,b,c)| = 4k$.

Ha $n \equiv 0 \pmod 3$, akkor $a^n + b^n + c^n \equiv 1 + 1 + 1 \not\equiv 0 \pmod p$.

Ha $n \equiv 1 \pmod 3$, akkor $a^n + b^n + c^n \equiv 1 + b + c \equiv 0 \pmod p$.

Ha $n \equiv 2 \pmod 3$, akkor $a^n + b^n + c^n \equiv 1 + c + b \equiv 0 \pmod p$.

Vagyis $S_p(a,b,c)$ éppen a p-nél kisebb, 3-mal nem osztható számokból áll, tehát pontosan $4k$ eleme van, ez pedig több, mint $\frac{p}{2} = 3k + \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: A számelmélet klasszikus kérdései gyakran abból fakadnak, hogy adott számkörben (pl az egészek között, vagy modulo n) értjük elég jól az additív és a multiplikatív struktúrát is külön-külön, de együtt nem. Például nem tudjuk, hogy mennyire tud egybeesni ez a kettő. És így a legegyszerűbbnek tűnő kérdések is évszázadokig megoldatlan problémákhoz vezethetnek.

Vegyük például a négyzetszámok halmazát, és keressünk bennük három elemet, melyekre teljesül, hogy $x + y = z$, vagy felírva, hogy négyzetszámokról van szó: $a^2 + b^2 = c^2$. Ennek a megoldásai a pitagoraszi számhármasok, és már ezek általános felírása ($a = (u-v)^2, b = 2uv, c = (u+v)^2$) sem nyilvánvaló.

Szintén a négyzetszámok között maradva felmerülhetnek még érdekes kérdések. Pl van-e számtani sorozat köztük. 3 elemből állót nem nehéz találni: $1, 25, 49$. Azt se nehéz belátni, hogy végtelen hosszú nem lehet. De akkor milyen hosszút tudunk találni? Talán meglepő lehet a válasz, de már 4 négyzetszámból álló számtani sorozat sincs.

Most vegyük a teljes hatványok halmazát. Ebben keresünk két számot, melyek különbsége 1. Ilyen például a 8 és a 9. Eugène Charles Catalan azt sejtette 1844-ben, hogy ezen kívül nincs is más, de csak 2002-ben látta be ezt Preda Mihăilescu.

Vagy a pitagoraszi számhármasok mintájára, ha $n \geq 3$-re vesszük az n-edik hatványok halmazát, és ott próbáljuk megoldani az $x + y = z$ egyenletet (vagy másképp fogalmazva az $a^n + b^n = c^n$ diofantoszi egyenletnek keressük a megoldásait), azt látjuk, hogy csak olyan triviális megoldásokat találunk, ahol a 3 számból legalább az egyik 0. Ezt vette észre Pierre de Fermat is 1637-ben, és azt sejtette, hogy nincs is más megoldása ennek az egyenletnek. És ez sejtés is maradt több, mint 350 évig, amikor is Andrew Wilesnak végül sikerült belátnia.

Ennyi idő alatt sokan sokféleképpen próbálkoztak vele. (Ezen egyszerűnek látszó probléma motiválta az algebra és a számelmélet rengeteg ágának kidolgozását.) Jó ötletnek tűnhet a kérdést modulo p nézni: $a^n + b^n \equiv c^n \pmod p$. Ha esetleg be tudnánk látni, hogy valamilyen n-re nem létezik nemtriviális megoldás végtelen sok p-re sem, akkor abból következne, hogy erre az n-re nincs megoldása az eredeti egyenletnek sem. Sajnos ez nem igaz, sőt minden n-re, ha $p > 16n^4$, akkor létezik nemtriviális megoldás.

És ilyen módon kapcsolódik a **D+5**-ös feladat is. Itt az $a^n + b^n \equiv -c^n \pmod p$ egyenlet megoldásainak számáról állapítottunk meg érdekes tényeket.

És akkor egy talán kevésbé közismert, de természetesen felvetődő kérdés. Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}$ egy n-elemű halmaz. Jelölje $A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ és $AA = \{a_1 a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ halmazokat. A kérdés, hogy mit tudunk mondani ezek méretéről n függvényében. Nyilván mindkettő legfeljebb $\binom{n}{2}$ elemű. És legalább mennyi? Nem nehéz belátni, hogy $2n - 1 \leq |A + A|$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha A egy számtani sorozat. Hasonlóan $2n-1 \leq |AA|$, és itt pedig mértani sorozat esetén áll fenn egyenlőség. Sőt az is igaz, hogy ha A „nagyjából” úgy néz ki, mint egy számtani, illetve mértani sorozat, akkor $|A+A|$, illetve $|AA|$ „kicsi”.

Szóval látjuk, hogy mindkét halmaz külön-külön lehet „kicsi”, de lehet-e egyszerre mindkettő kicsi, azaz hogy mindkettőben legfeljebb cn elem legyen? Vagyis, hogy lehet-e olyan A-t találni, ami egyszerre hasonlít egy számtani és egy mértani sorozatra?

Erdős Pál és Szemerédi Endre tétele szerint léteznek olyan c és ε konstansok, hogy

$$\max\{|A+A|, |AA|\} > c|A|^{1+\varepsilon},$$

vagyis emiatt a két halmaz egyikének biztosan „nagynak” kell lennie. A legjobb ma ismert ε-t Solymosi József bizonyította, eszerint $\frac{1}{3}$ tetszőlegesen megközelíthető. Erdős és Szekeres sejtése szerint egyébként ε tetszőlegesen közel választható 1-hez.

A kérdés egyébként modulo p is érdekes. Ekkor alkalmas c_1 és c_2 konstansok mellett az teljesül, hogy

$$\max\{|A+A|, |AA|\} > \min\left\{c_1\sqrt{p|A|}, c_2\frac{|A|^2}{p}\right\}.$$

D+6. **Játék:** A játék kezdetén a korongok néhány (nem feltétlenül egyforma méretű) téglalapban lesznek elhelyezve. A két játékos felváltva lép. Egy lépésben a soron lévő játékos kiválaszt egy korongokból álló téglalapot, és egy sorának vagy oszlopának minden korongját leveszi. (Korongokból álló téglalapnak egy olyan téglalap alakú területet nevezünk, ahol minden mezőn van korong, de közvetlenül mellette sehol.) Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás:

Definíció: A lehetséges téglalapokat soroljuk be 3 típusba oldalaik paritása szerint:

- A típusú: mindkét oldala páros;
- B típusú: egyik oldala páros, a másik páratlan;
- C típusú: mindkét oldala páratlan.

Definíció: *Nyerőállásnak* nevezzük az olyan állásokat, melyekből a soron következő játékos nyerni tud, és *vesztőállásnak* az összes többi állást.

Állítás: Egy állás pontosan akkor vesztőállás, ha benne a B típusú és C típusú téglalapok száma is páros.

Bizonyítás: A maradék korongok száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Nyilván ha 0 korong maradt, akkor a soron lévő játékos vesztett, és ez az állításunk szerint is vesztőállás, hiszen sem B, sem C típusú téglalap nincs. Most tegyük fel, hogy k-nál kisebb korongszámokra már beláttuk az állítást, és vegyünk egy olyan állást, melyben k korong van. A B és C típusú téglalapok számának paritása alapján négyféle eset lehetséges.

1. eset: Páratlan sok B típusú és páros sok C típusú téglalap van. Ekkor azt kell belátnunk, hogy ez nyerőállás, azaz létrehozható belőle vesztőállás. Mivel van legalább egy B típusú téglalapunk, az egyik ilyennek elvehetjük egy olyan szélső sorát, mely páros sok korongból áll. Ekkor a B típusú téglalap helyett csináltunk egy A típusút, azaz a B téglalapok száma eggyel csökkent, a C nem változott. Így páros sok B és páros sok C maradt, ami az indukciós feltevés szerint vesztőállásnak felel meg.

2. eset: Páros sok B típusú és páratlan sok C típusú téglalap van. Szintén azt kell belátnunk, hogy ez nyerőállás. Ha van olyan C téglalap, aminek egyik oldala 1, akkor az egész téglalap elvehető egy lépésben, ezáltal páros sok C típusú téglalap marad, a másik két típus mennyisége nem változik, így az indukciós feltevés miatt vesztőálláshoz jutunk. Ha pedig nincs ilyen, akkor viszont olyat találunk, melynek egyik oldala legalább 3. Tehát van egy m sorból és n oszlopból álló téglalap, melyben m és n páratlan, és $m \geq 3$. Ekkor a téglalap második oszlopát elvéve, kapunk egy $m \times 1$-es és egy $m \times (n-2)$-es téglalapot. Mindkét kapott téglalap C típusú, így összességében a C típusú téglalapok száma eggyel nőtt, azaz páros lett. A többi típus darabszáma nem változott, így páros sok B és páros sok C lett, ami vesztőállást jelent.

3. eset: Páratlan sok van B és C típusú téglalapból is. Megint azt kell belátnunk, hogy ez nyerőállás. Ekkor vegyünk el az egyik B típusú téglalapból egy páratlan hosszú szélső sort. Ekkor a maradék téglalap mindkét oldala páratlan lesz, azaz egy B típusú téglalap átalakult egy C típusúvá. Így a B és C típusúak számának paritása is változott, azaz B és C típusú téglalapból is páros sok lett, ami az indukciós feltevés alapján vesztőállás.

4. eset: Páros sok van B és C típusú téglalapból is. Azt akarjuk belátni, hogy ez vesztőállás, azaz bármit lépünk, nyerőálláshoz jutunk. Az alábbi táblázat felsorolja a potenciális lépéseket. A ΔA, ΔB, ΔC oszlopok mutatják az egyes típusú téglalapok darabszámainak változását a lépések hatására.

Mihez nyúlunk?	Ennek a méretei	Mit veszünk el?	Maradék téglalap(ok) méretei	ΔA	ΔB	ΔC
A	$2k \times 2l$	1. sor	$(2k-1) \times 2l$	-1	+1	0
A	$2k \times 2l$	$2x$. sor	$(2x-1) \times 2l$ és $(2k-2x) \times 2l$	0	+1	0
A	$2k \times 2l$	$2x+1$. sor	$2x \times 2l$ és $(2k-2x-1) \times 2l$	0	+1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	1. páros sor	$2k \times 2l$	+1	-1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x$. páros sor	$(2x-1) \times 2l$ és $(2k-2x+1) \times 2l$	0	+1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x+1$. páros sor	$2x \times 2l$ és $(2k-2x) \times 2l$	+2	-1	0
B	$(2k+1) \times 2l$	1. páratlan sor	$(2k+1) \times (2l-1)$	0	-1	+1
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x$. páratlan sor	$(2k+1) \times (2x-1)$ és $(2k+1) \times (2l-2x)$	0	0	+1
B	$(2k+1) \times 2l$	$2x+1$. páratlan sor	$(2k+1) \times 2x$ és $(2k+1) \times (2l-2x-1)$	0	0	+1
C	$(2k+1) \times (2l+1)$	1. sor	$2k \times (2l+1)$	0	-1	+1
C	$(2k+1) \times (2l+1)$	$2x$. sor	$(2x-1) \times (2l+1)$ és $(2k-2x) \times (2l+1)$	0	+1	0
C	$(2k+1) \times (2l+1)$	$2x+1$. sor	$2x \times (2l+1)$ és $(2k-2x-1) \times (2l+1)$	0	+1	0

Látjuk, hogy bármit lépünk, a B vagy a C típusú téglalapok számának paritása változni fog, azaz nem kaphatunk újra vesztőállást.

Azaz az állításunkat beláttuk, és stratégiánk is van, hiszen minden nyerőállásban mutattunk egy olyan lépést, ami vesztőállást hagy maga után.