Döntő
2018. február 10.

XI. Dürer Verseny
Matematika váltó
9-10. osztályosok

C C+ kategória

C-1. Hányféleképp írható fel a 99 két kétjegyű szám összegeként, ha a kétjegyű számokat egymás után írva kapott négyjegyű szám is osztható 99-cel?
Két felírást akkor is különbözőnek tekintünk, ha az összeadandó számpárok sorrendje különbözik, vagyis például 8*-nak* $3+5$*-ként és* $5+3$*-ként történő felírása különbözőnek számít.* (3 pont)

C-2. Egy szabályos sokszög körülírt körének középpontját tükröztük a sokszög összes oldalára. Az így kapott pontokból álló sokszög területe éppen háromszorosa az eredeti sokszögének. Hány oldalú az eredeti sokszög? (3 pont)

C-3. Egy hangya mászkált egy 4×8-as sakktábla élein. Hány élhossznyit kellett legalább másznia az egyik sarokból az átellenesbe, ha az útja során balra nézve mindig fekete mezőt látott? (3 pont)

C-4. Karkötőt szeretnénk készíteni két piros, két kék és két zöld gyöngy felfűzésével. A tervezés során egy szabályos hatszög csúcsaiba rakjuk le a gyöngyöket. Hányféle karkötő készíthető, ha a hatszög forgatásával vagy tengelyes tükrözésével egymásba vihető karkötőket nem tudjuk egymástól megkülönböztetni? (3 pont)

C-5. Egy táblára felírtuk a 2018-at és egy kisebb pozitív számot. Egy lépésben, ha a két táblán levő szám átlaga egész, letörölhetjük az egyiket, és felírhatjuk helyette az átlagot. Legfeljebb hány ilyen lépést végezhetünk el? (4 pont)

C-6. ABC derékszögű háromszögben C csúcsnál van derékszög. D az AB felezőpontja, a D-ben AB-re állított merőleges CB-t E-ben metszi. Ha AB hossza 40 és AC hossza 24, akkor mekkora az $ADEC$ négyszög területe? (4 pont)

C-7. Mi a $2018 \cdot 2017 \cdot 2016 \cdot \ldots \cdot 2001 \cdot 2000$ szorzat utolsó nem 0 számjegye? (4 pont)

C-8. Melyik az a legkisebb pozitív prímszám, amely felírható 2, 3, 4, illetve 5 különböző pozitív prímszám összegeként is? (4 pont)

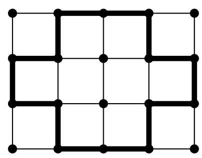
C-9. Egy sakktábla bal alsó 3×3-as résztáblájának minden mezőjére egy-egy korongot helyeztünk. Bármely koronggal átugorhatunk vele élben vagy csúcsban szomszédos mezőn álló korongot, ha az érkezési mező üres. Egy másik megengedett lépés, hogy egy korongot feljebb tolhatunk egy mezővel, ha az a mező üres. Szeretnénk eljuttatni a 9 korongot a bal felső 3×3-as résztábla mezőire úgy, hogy minden mezőn egy korong álljon. Legalább hány lépés kell ehhez? (5 pont)

C-10. Egy pozitív egész számot „kettes önvégződőnek” nevezünk, ha a szám 2-es számrendszerbeli alakjának utolsó néhány számjegye éppen a szám 10-es számrendszerbeli alakja. Hány 2018-nál kisebb kettes önvégződő szám van? (5 pont)

C-11. Két testvér eladta a birkanyáját. Minden birkát annyi tallérért adtak el, ahány birka a nyájban eredetileg volt. A bevételen 10 talléronként osztozkodtak. Először az idősebb testvér kapott 10 tallért, azután a fiatalabb, majd újra az idősebb és így tovább. Utoljára a fiatalabbnak már csak 10-nél kevesebb tallér jutott, ezért az idősebb nekiadta a bicskáját, ezzel összességében mindkét testvér vagyona ugyanannyival változott. Hány tallért ért a bicska? (5 pont)

C-12. Egy városban észak-déli irányú sugárutak és kelet-nyugati irányú utcák vannak, 1-től 10-ig számozva. Ha áthaladunk az i-edik sugárút és a j-edik utca kereszteződésén, $i \cdot j$ dollárt kell fizetnünk. Legkevesebb hány dollárért juthatunk el a az első sugárút és az első utca kereszteződéséből a 10-edik utca és a 10-edik sugárút kereszteződésébe? (az első és az utolsó kereszteződésnél nem kell fizetni) (5 pont)

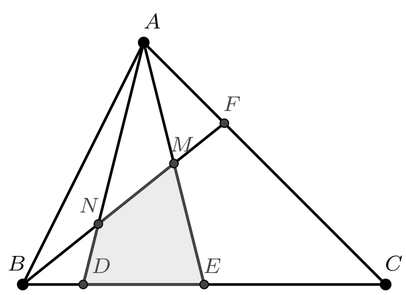
C-13. Egy négyzetrácson kijelölt 20×18 kis négyzetből álló rácstéglalapban mekkora a legnagyobb kerületű önmagát nem metsző rácssokszög kerülete, ha a sokszög minden oldala a négyzetrács éleire illeszkedik?
Az ábrán egy 4×3*-as rácstéglalapba rajzolt 14 kerületű rácssokszög látható.* (6 pont)



C-14. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a prím számjegyek száma prímszám? (6 pont)

C-15. Egy túrázó úgy döntött, hogy n ($n \geq 2$) nap alatt m (m pozitív egész) km-t fog megtenni. Első nap 1 km-t és a megmaradó távolság hetedrészét tette meg, a másodikon 2 km-t és a még fennmaradó távolság hetedrészét, és így tovább. Végül az n-edik, azaz utolsó napon a még visszamaradt, pontosan n km-t gyalogolta le. Hány km-es volt a túra? (6 pont)

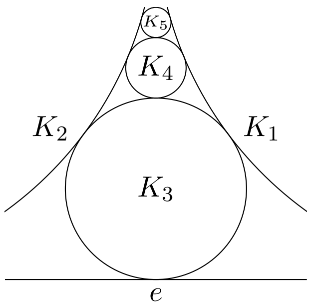
C-16. Az ABC háromszög BC oldalán D és E pontok úgy helyezkednek el, hogy $BD : DE : EC = 1 : 2 : 3$. Az F pont a háromszög AC oldalát $AF : FC = 1 : 2$ arányban osztja. Az M és N pontok a BF szakasznak az AE és AD szakaszokkal való metszéspontjait jelöli. Írjuk fel az $MNDE$ négyszög és az ABC háromszög területének arányát $\frac{P}{Q}$ alakban, ahol ez a tört már tovább nem egyszerűsíthető. Mennyi $100P + Q$ értéke?
Például ha a felírt tört $\frac{3}{10}$, *akkor* $100P + Q = 310$ *legyen a válasz.*
(6 pont)



C-17. 4 gyerek dobált egy labdát. Béla kezte a labdázást és a végén is hozzá került a labda. Összesen 8-szor dobták át a labdát valaki másnak. Hányféle útja lehetett a labdának? (7 pont)

C-18. 27 darab 1-től 27-ig számozott kis kockából építettünk valahogyan egy $3 \times 3 \times 3$-as kockát. Kiszámoltuk az összes lehetséges három kis kockából álló $3 \times 1 \times 1$-es téglatestben az alkotó kis kockák sorszámának az összegét. Ezen összegek közül legfeljebb mennyi lehet páratlan? (7 pont)

C-19. K_1 és K_2 egyenlő sugarú körök, amelyek érintik egymást és az e egyenest. A K_3 kör érinti az e egyenest, K_1-et és K_2-t, a K_4 kör érinti K_1-et, K_2-t és K_3-at, a K_5 kör érinti K_1-et, K_2-t és K_4-et az ábra szerint. Ha K_5 sugara 1 cm, hány cm K_1 sugara? (7 pont)



C-20. Van egy 49 kártyából álló pakli, melyben 7-féle színűek a lapok, és minden színből 7 darab, 1-től 7-ig számozott lap van. Bella véletlenszerűen felhúzott 8 lapot. Ha tudjuk, hogy a 8 lap között minden szín és minden szám is előfordul, mennyi az esélye, hogy Bella el tud egy lapot dobni úgy, hogy a maradék 7 lap között is minden szín és minden szám előforduljon? A választ $100P + Q$ formában adjátok meg, ahol $\frac{P}{Q}$ a keresett tört legegyszerűbb alakja!
Például ha a felírt tört $\frac{3}{10}$, *akkor* $100P + Q = 310$ *legyen a válasz.* (7 pont)

Megoldókulcs:

C-1.	80	C-5.	10	C-9.	24	C-13.	398	C-17.	1641
C-2.	6	C-6.	234	C-10.	11	C-14.	4640	C-18.	24
C-3.	16	C-7.	6	C-11.	2	C-15.	36	C-19.	24
C-4.	11	C-8.	43	C-12.	494	C-16.	524	C-20.	409