D-1. George a Fibonacci-számok mintájára felírta ezt a 15 számot: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364. Mi a 15 szám összege? (3 pont)

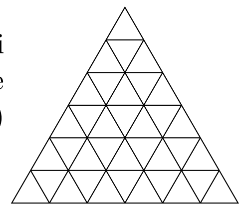
D-2. Törpkertész epret és málnát ültet. Az epret egy derékszögű háromszög alakú ágyásba ülteti, melynek két befogója 10 illetve 24 méter. A málnát pedig egy téglalap alakú ágyásba, melynek rövidebbik oldala a háromszög átfogójához tartozó magassággal egyenlő. Hány méter a téglalap hosszabbik oldala, ha Törpkertész ugyanakkora területen ülteti az epret és a málnát? (3 pont)

D-3. Melyik az a legkisebb pozitív prímszám, amely felírható 2, 3, 4, illetve 5 különböző pozitív prímszám összegeként is? (3 pont)

D-4. Egy pozitív egész számot „kettes önvégződőnek” nevezünk, ha a szám 2-es számrendszerbeli alakjának utolsó néhány számjegye éppen a szám 10-es számrendszerbeli alakja. Hány 2018-nál kisebb kettes önvégződő szám van? (3 pont)

D-5. Mi a $2018 \cdot 2017 \cdot 2016 \cdot \ldots \cdot 2001 \cdot 2000$ szorzat utolsó nem 0 számjegye? (4 pont)

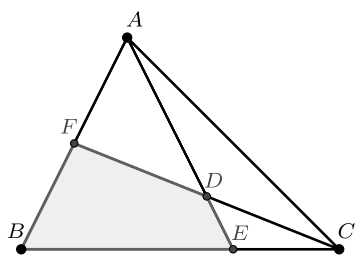
D-6. Legalább hányat kell az alábbi ábra 36 kis háromszöge közül feketére festeni ahhoz, hogy minden fehéren maradt kis háromszögnek legyen közös csúcsa feketére festett háromszöggel? (4 pont)



D-7. Egy táblára felírtuk a 2018-at és egy kisebb pozitív számot. Egy lépésben, ha a két táblán levő szám átlaga egész, letörölhetjük az egyiket, és felírhatjuk helyette az átlagot. Legfeljebb hány ilyen lépést végezhetünk el? (4 pont)

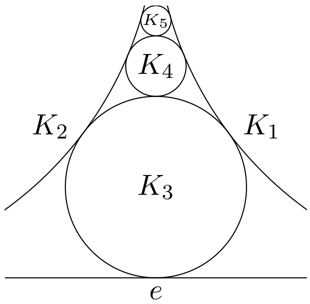
D-8. Két testvér eladta a birkanyáját. Minden birkát annyi tallérért adtak el, ahány birka a nyájban eredetileg volt. A bevételen 10 talléronként osztozkodtak. Először az idősebb testvér kapott 10 tallért, azután a fiatalabb, majd újra az idősebb és így tovább. Utoljára a fiatalabbnak már csak 10-nél kevesebb tallér jutott, ezért az idősebb nekiadta a bicskáját, ezzel összességében mindkét testvér vagyona ugyanannyival változott. Hány tallért ért a bicska? (4 pont)

D-9. Az ABC egységnyi területű háromszög AB oldalának felezőpontja F. Legyen D a CF szakasz felezőpontja. Az AD egyenes a BC oldalt E-ben metszi. Határozzátok meg az $EDFB$ négyszög területét $\frac{P}{Q}$ alakban, ahol ez a tört már tovább nem egyszerűsíthető. Mennyi $100P+Q$ értéke?
Például ha a felírt tört $\frac{3}{10}$, akkor $100P+Q=310$ legyen a válasz.
(5 pont)



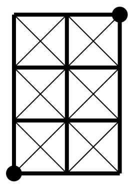
D-10. Egy túrázó úgy döntött, hogy n ($n \geq 2$) nap alatt m (m pozitív egész) km-t fog megtenni. Első nap 1 km-t és a megmaradó távolság hetedrészét tette meg, a másodikon 2 km-t és a még fennmaradó távolság hetedrészét, és így tovább. Végül az n-edik, azaz utolsó napon a még visszamaradt, pontosan n km-t gyalogolta le. Hány km-es volt a túra? (5 pont)

D-11. K_1 és K_2 egyenlő sugarú körök, amelyek érintik egymást és az e egyenest. A K_3 kör érinti az e egyenest, K_1-et és K_2-t, a K_4 kör érinti K_1-et, K_2-t és K_3-at, a K_5 kör érinti K_1-et, K_2-t és K_4-et az ábra szerint. Ha K_5 sugara 1 cm, hány cm K_1 sugara? (5 pont)



D-12. Bergengócia 5 legnagyobb városa közül bármelyikből bármelyikbe vezet közvetlen buszjárat. (A buszok útközben sehol sem állnak meg, csak a két végállomáson.) A busztársaság azonban szeretné megszüntetni a járatok felét úgy, hogy bármely két város között pontosan az egyik irányú járat maradjon meg. De persze azt is szeretné, hogy továbbra is bármelyik városból bármelyik másikba el lehessen utazni (esetleg átszállással). Hányféleképpen teheti ezt meg? (5 pont)

D-13. Gízában a fáraó 6 legfőbb hivatalnokának is állítottak egy-egy piramist. A 6 piramist szorosan egymás mellé építették 2×3-as formációban, ahogy az ábrán is látható. Ezek a piramisok olyan négyzet alapú gúlák, melyek oldallapjai 18 m oldalú szabályos háromszögek. Egy skarabeusz bogár (aki az oldallapokon is könnyedén tud sétálni) a lehető legrövidebb úton akar átjutni az ábrán jelölt két átellenes sarok között. Ha a legrövidebb út hossza d m, akkor mennyi d^2? (6 pont)



D-14. Minden $k \geq 1$ egész számra legyen $p(k)$ a legkisebb olyan prímszám, ami nem osztja k-t. Legyen $y(k)$ azon prímek szorzata, melyek kisebbek, mint $p(k)$ (ha nincs ilyen prím, akkor $y(k) = 1$). Legyen (x_n) az a sorozat, ahol $x_0 = 1$, és $x_{n+1}y(x_n) = x_n p(x_n)$ minden $n \geq 0$-ra. Keressétek meg a legkisebb olyan t pozitív egészet, melyre $x_t = 7378$. (6 pont)

D-15. Egy $10 \times 10 \times 10$ rácspontból álló háromdimenziós kockarácsban hány olyan egyenes van, ami pontosan 8 rácspontot tartalmaz? (6 pont)

D-16. Egy 4×4-es tábla minden mezőjére világos vagy sötét huszárt helyeztünk el olyan módon, hogy minden huszár lát mindkét színű huszárt (azaz lóugrásban tőle áll világos és sötét színű huszár is). Hányféleképpen lehetséges az ilyen elhelyezés? (6 pont)

D-17. Van egy 49 kártyából álló pakli, melyben 7-féle színűek a lapok, és minden színből 7 darab, 1-től 7-ig számozott lap van. Bella véletlenszerűen felhúzott 8 lapot. Ha tudjuk, hogy a 8 lap között minden szín és minden szám is előfordul, mennyi az esélye, hogy Bella el tud egy lapot dobni úgy, hogy a maradék 7 lap között is minden szín és minden szám előforduljon? A választ $100P + Q$ formában adjátok meg, ahol $\frac{P}{Q}$ a keresett tört legegyszerűbb alakja!
Például ha a felírt tört $\frac{3}{10}$, *akkor* $100P + Q = 310$ *legyen a válasz.* (7 pont)

D-18. Az ABC háromszög oldalai $c = \sqrt{41}$, $b = 5$ és $a = 8$ hosszúak. Legyen O a köréírt kör középpontja, és legyen A' az A tükörképe O-ra. Mekkora az $A'BC$ háromszög területe? (7 pont)

D-19. Egy harmadfokú P polinom minden együtthatója egész, valamint a főegyütthatója 1. Azt is tudjuk, hogy P-nek minden z (nem feltétlenül valós) gyökére igaz, hogy $|z| = 18$ vagy $|z| = 20$. Hány ilyen polinom létezik? (7 pont)

D-20. Adott egy háromszög, melynek szögei teljesítik a $\cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma) = 1$ összefüggést. Tudjuk, hogy a háromszögnek van egy 10 és egy 13 hosszú oldala. Mekkora a harmadik oldal hosszának négyzete, ha az ilyen feltételek mellett a lehető legnagyobb? (7 pont)

Megoldókulcs:

D-1.	3568	D-5.	6	D-9.	512	D-13.	6156	D-17.	409
D-2.	13	D-6.	5	D-10.	36	D-14.	1097	D-18.	15
D-3.	43	D-7.	10	D-11.	24	D-15.	168	D-19.	620
D-4.	11	D-8.	2	D-12.	544	D-16.	576	D-20.	399