1. feladat

2017. június 19-én új exobolygók (Naprendszerünkön kívüli bolygók) felfedezéséről tett bejelentést a NASA. 219 új bolygó létezésére találtak bizonyítékot, és ezek közül tíz a Földhöz hasonló kőzetbolygó, amely a csillaga lakhatósági zónájában kering. Az újabb és újabb exobolygó-felfedezések során felmerül a kérdés, hogy vajon lakhatóak-e ezek a bolygók, illetve lehet-e saját élőviláguk. Az, hogy lakható-e egy bolygó, sok tényezőtől függ: a bolygó légkörének összetételétől, sűrűségétől, a bolygó belső aktivitásától, és ami a legfontosabb: hogy a bolygó a csillaga lakhatósági zónájába esik-e, vagyis hogy a csillagról beérkező sugárzás optimális-e. Ez a zóna mi Naprendszerünk esetében $0,97$ CsE és $1,37$ CsE közé esik (1 Csillagászati Egység a Naptól való közepes Földtávolság).

(a) Becsüljük meg egy 5 naptömegű csillag lakhatósági zónájának határait!

Segítség: egy fősorozatbeli csillag tömege és luminozitása (egységnyi idő alatt kibocsátott sugárzása) között jó közelítéssel a következő összefüggés áll fenn: $L = kM^{3,5}$, ahol L a luminozitás, M a csillag tömege és k állandó.

(b) Tekintsünk egy csillagot, amely csillag lakhatósági zónájának külső határa 4 CsE. Az idő hány százalékát tölti az a bolygó a lakhatósági zónában, amely pályájának fél nagytengelye 4 CsE, excentricitása $0,2$? (Az excentricitás a fókusz pontok egymástól vett távolságának felének és a fél nagytengelynek a hányadosa.)

2. feladat

Egy hokijátékos súrlódásmentesnek tekinthető jégpályán v_0 kezdősebességgel elüt egy m tömegű, r sugarú hokikorongot, és azzal eltalál egy ugyanakkora álló korongot. Mindezt oly módon, hogy a mozgó korong tömegközépponti sebességvektorának egyenese az ütközés előtt éppen érintette az álló korongot. A pillanatszerű ütközés után meglepődve veszi észre, hogy a két korong megközelítőleg azonos sebességgel, egy irányba halad tovább. (Az ütközés során a testek nem tapadtak egymáshoz, és utána sem érnek össze). Adatok: $m = 160$ g, $r = 7,6$ cm, $v_0 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(a) Mekkora a korongok közötti csúszási súrlódási együttható?

(b) Mennyi hő fejlődött az ütközés során?

3. feladat

Tekintsünk egy olyan kondenzátort, ami két egymástól d távolságra elhelyezett, L élhosszúságú, négyzet alakú fémlapból áll. Vegyünk továbbá egy ϵ_r relatív dielektromos állandójú, $L \times L \times d$ méretű, téglatest alakú dielektrikum-lapot. Ezt a dielektrikum lapot felülről beletoljuk a kondenzátorba $\frac{L}{2} + x$ mélységig. Az első részfeladat a kondenzátor kapacitásáról szól.

(a) Fejezzük ki a kondenzátor kapacitását x függvényében, a

$$C(x) = C_0 + \alpha \cdot x \tag{1}$$

formula által megadott alakban. Mennyi a C_0 és α állandók értéke?

Anna és Béla fiatal fizikushallgatók, akik meg szeretnék határozni az előző feladatban bevezetett dielektrikum-lapra ható erő nagyságát és irányát. Ehhez a virtuális munka elvét használják fel, ami a következő ötleten alapszik. Képzeljük el, hogy a lapot gondolatban egy kis δx hosszal arrébb mozgatjuk. Ha a lapra ható erőt $F(x)$ jelöli, akkor a rendszer $\bar{E}$ energiájának kis $\delta \bar{E}$ megváltozásának éppen meg kell egyeznie az $F(x)$ erő által a lapon végzett $F(x) \cdot \delta x$ munka -1-szeresével:

$$\delta \bar{E} = -F(x) \cdot \delta x \, . \tag{2}$$

Ez a formula fejezi ugyanis ki az energia megmaradását a teljes rendszerben. (Megjegyzés: a felülvonás az energián nem jelent semmi egzotikusat, csak azért szerepel ott, hogy az elektromos mezőtől megkülönböztessük.)

Annának és Bélának már csak a rendszer energiájának képletére van szüksége ahhoz, hogy az erőt kiszámítsák. Azonban a két hallgató sajnos nem tud megegyezni abban, hogy melyik a rendszer energiájának helyes képlete. A következő két képlet mellett kardoskodnak:

$$\bar{E}_A(x) = \frac{Q^2}{2\,C(x)} \, , \tag{3a}$$

$$\bar{E}_B(x) = \frac{1}{2}\,C(x)\,U^2 \, , \tag{3b}$$

ahol Anna képletében a Q töltés, Béla képletében pedig az U feszültség állandó, vagyis x-től független.

(b) Számoljuk ki az $F_A(x)$ és $F_B(x)$ erőt Anna illetve Béla képletének megfelelően az $x = 0$ helyen. Mutassuk meg, hogy a két végeredmény éppen egy előjelben különbözik. (Ha szükséges, használjuk az $\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$ közelítést, ha ϵ kicsi.)

Anna és Béla heves vitája közepén megérkezik Cecília, aki segít feloldani az ellentmondást. Rámutat ugyanis arra, hogy az energiamegmaradás csak zárt rendszerben érvényes és előbbi két hallgatónk egyikének formuláját ki kell egészíteni még egy taggal ahhoz, hogy a rendszert zártnak lehessen tekinteni.

(c) Cecília logikáját követve oldjuk fel az ellentmondást és döntsük el, melyik előjel a helyes.

4. feladat

Ebben a feladatban a CO_2 molekula rezgéseit vizsgáljuk. Alapállapotában ez egy lineáris molekula, az atomok alábbi elrendezésével: O=C=O, vagyis az oxigén atomok a molekula két szélén találhatóak, a szén atom pedig az őket összekötő szakasz felezőpontjában. Az atomokat a feladat során mindvégig tekintsük pontszerűnek!

Rezgési módusnak nevezzük a molekula több atomjának egyszerre történő kicsiny elmozdulását, ha az elmozdulás közben a molekula tömegközéppontja valamint a molekula perdülete nem változik. Ugyanazon molekula több rezgési módusát akkor tekintjük különbözőeknek, ha semelyik sem állítható elő a többinek (vektoriális) összegeként.

(a) Hány különböző rezgési módusa van a CO_2 molekulának?

Segítség: Gondoljuk át hány szabadsági foka van a molekulának, illetve az egyes atomoknak. Esetleg keressük meg azokat a molekula mozgásokat, melyek biztosan nem rezgések.

(b) Rajzoljuk fel a CO_2 rezgési módusait! Nyilakkal jelöljük az egyes atomok elmozdulását az alapállapothoz képest! Adjuk meg a nyilak hosszainak arányát is!

Segítség: Két olyan módus van, amely megtartja a molekula lineáris szerkezetét, valamint szintén egynél több olyan, amely megtöri ezt a lineáris szerkezetet. Ez utóbbiak nagyon hasonlítanak egymásra.

A továbbiakban vizsgáljuk a CO_2 molekula azon rezgéseit, amelyek megtartják a lineáris szerkezetet! Modellezzük úgy a molekulát, hogy a szén atomot két darab D direkciós állandójú rugó köti az oxigén atomokhoz![1] Egy rezgési módust normál módusnak hívunk, ha az összes atom, azonos frekvenciával harmonikus rezgő mozgást végez! Lehet, hogy a (b) feladatban megtalált módusok nem ilyenek, de ebben az esetben ilyen harmonikus módusokat állíthatunk elő a megtalált módusok vektoriális összegeként.

(c) Keressük meg a két különböző lineáris normál módust!

(d) Határozzuk meg a két lineáris normál módushoz tartozó két különböző rezgési körfrekvenciát!

(e) Mit mondhatunk a modellben szereplő rugó D direkciós erejéről, ha a mérési eredményekben a lineáris rezgések frekvenciáit $4.16 \cdot 10^{13}$ Hz illetve $7.04 \cdot 10^{13}$ Hz-nek mérték? (A molekula ^{12}C és ^{16}O izotópokat tartalmaz.)

5. feladat

Egy egyenletesen töltött, végtelen hosszú egyenes vonaltöltés olyan elektromos teret hoz létre, amelyben két, a vonaltól r_1 illetve r_2 távolságra lévő pont potenciálkülönbsége

$$U(r_1) - U(r_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}, \tag{4}$$

ahol λ a vonal töltéssűrűsége (egységnyi hosszra eső töltése), ε_0 pedig a vákuum permittivitása.

[1] A feladat további része pontatlanul került kitűzésre. A jelen verzió és megoldókulcs már tartalmazzák a pontosítást.

(a) Tekintsünk két, egymástól $2l$ távolságra lévő vonaltöltést, λ illetve $-\lambda$ töltéssűrűségekkel. Írjuk fel az általuk létehozott elektromos potenciált! Milyen alakúak az ekvipotenciális felületek?

(b) Vizsgáljuk egy kondenzátort, amely két egymással párhuzamos tengelyű, R sugarú hengerből áll. A tengelyek távolsága $2d$. Az előző feladatrész eredményét felhasználva bizonyítsuk be, hogy ennek a rendszernek az egységnyi hosszra eső kapacitása a következő képlettel írható fel: $C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/R+\sqrt{d^2/R^2-1})}$.

Segítség: A kapacitás számolásához használjuk ki, hogy a két vezető közötti feszültség számolásánál a vezetőket helyettesíthetjük a vezetőkön belüli olyan töltéseloszlással amelynek a vezetők éppen ekvipotenciális felületein helyezkednek el.

Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.
A feladatok megoldására 180 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők