C1. A nagymamám azt gondolja, hogy egyre fiatalabb, hiszen 5 éve ötször annyi idős volt, mint én akkor, most pedig csak négyszer annyi idős, mint én most.
a) Hány éves a nagymamám?
b) Hány év múlva lesz háromszor annyi idős, mint én akkor?

Megoldás:

a) Nézzük a nagymamám és köztem lévő korkülönbséget. 5 évvel ezelőtt az életkorom a különbség negyede volt, most pedig a harmada. Így tudjuk, hogy a korkülönbség harmada 5-tel több a negyedénél. A korkülönbség negyedének és harmadának különbsége éppen a korkülönbség tizenkettede, amiről tudjuk, hogy 5 év. Tehát a korkülönbség 60 év. Ennek a harmada 20, ebből következik, hogy én éppen 20 éves vagyok, a nagymamám pedig 80.

b) Az előző feladatrész alapján tudjuk, hogy a nagymamám 60 évvel idősebb nálam. Pontosan akkor lesz a nagyi háromszor annyi idős, mint én, ha a köztünk lévő korkülönbség az életkorom kétszerese lesz. Ez pedig éppen $\frac{60}{2} = 30$ éves koromban lesz így, ami 10 múlva lesz és nagymama is tényleg 90 éves lesz akkor.

2. Megoldás:

a) Legyen x a mostani életkorom és y a nagymamámé. Ekkor a következőt tudjuk:

$$(x-5)\cdot 5 = y-5 \qquad (1)$$
$$4\cdot x = y \qquad (2)$$

Helyettesítsük be az első egyenletbe a második alapján y helyére $4\cdot x$-et. Így $(x-5)\cdot 5 = 4\cdot x - 5$ adódik.

$$5\cdot x - 25 = 4\cdot x - 5$$
$$x = 20$$

Tehát én most éppen 20 éves vagyok, a nagymamám pedig 80.

b) Legyen d az, hogy hány év múlva lesz a nagymamám háromszor annyi idős, mint én. Azaz a $(20+d)\cdot 3 = 80+d$ egyenlet megoldását keressük.

$$60 + 3\cdot d = 80 + d$$
$$2\cdot d = 20$$
$$d = 10$$

Tehát 10 év múlva lesz a nagymamám háromszor annyi idős, mint én.

C2. Egy pozitív egész számról az alábbi 7 állítást tették:
I. A szám kisebb, mint 23. **II.** A szám kisebb, mint 25. **III.** A szám kisebb, mint 27. **IV.** A szám kisebb, mint 29.
V. A szám páros. **VI.** A szám hárommal osztható. **VII.** A szám osztható öttel.
Tudjuk, hogy az állítások közül 4 igaz, míg 3 hamis. Adjátok meg a legnagyobb ilyen számot, és indokoljátok, hogy miért nem lehet nagyobb.

Megoldás:

Az első 4 állítás közül ha valamelyik nem teljesül, a nála kisebb sorszámúak sem teljesülnek. Az tehát nem lehet, hogy a **IV.** állítás ne teljesüljön, mert akkor lenne legalább 4 hamis állítás a számról. Emiatt a szám "< 29", tehát legfeljebb 28.

Induljunk egyesével lefelé, és nézzük meg melyik a legnagyobb szám, amelyre éppen 4 állítás teljesül.

	< 23	< 25	< 27	< 29	páros	3-mal ohó	5-tel ohó	**igaz állítások**
28	Hamis	Hamis	Hamis	Igaz	Igaz	Hamis	Hamis	**2**
27	Hamis	Hamis	Hamis	Igaz	Hamis	Igaz	Hamis	**2**
26	Hamis	Hamis	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	Hamis	**3**
25	Hamis	Hamis	Igaz	Igaz	Hamis	Hamis	Igaz	**3**
24	Hamis	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	**5**
23	Hamis	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	Hamis	Hamis	**3**
22	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	Hamis	**5**
21	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	Igaz	Hamis	**5**
20	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	Igaz	**6**
19	Igaz	Igaz	Igaz	Igaz	Hamis	Hamis	Hamis	**4**

Láthatjuk, hogy az első szám a 19, amelyre pontosan 4 állítás teljesül, tehát ez lesz a legnagyobb.

C3. Nagyi 30 cm × 30 cm-es négyzet alakú pitéjének a széle a legfinomabb. Ezért három unokája úgy akar osztozkodni, hogy mindenkinek ugyanakkora (területű) pite jusson, de a széléből is ugyanannyit kapjon mindenki. Fel tudják-e így vágni a pitét 3 összefüggő darabra?

Megoldás:

Fel tudják így vágni a pitét. Mutatunk egy jó megoldást. Az ötlet az lesz, hogy először felosztjuk a kerületet három egyenlő hosszú, egybefüggő darabra, majd ezután megpróbáljuk a pite belsejét három egyenlő területű darabra vágni úgy hogy a széléből a megadott darabokat vágjuk ki. Mivel a pite kerülete 120 cm, ezért mindhárom kerület-darabnak 40 cm hosszúnak kell lennie. Nevezzük el a pite sarkait A, B, C és D pontoknak. Legyen E az B és C közti B-hez közelebbi harmadolópont (ami tehát 10 cm-re van B-től). Legyen F a C és D közti D-hez közelebbi harmadolópont (ami tehát 10 cm-re van D-től). Ekkor például az ABE töröttvonal, az ADE töröttvonal és az FCE töröttvonal hossza is 40 cm.

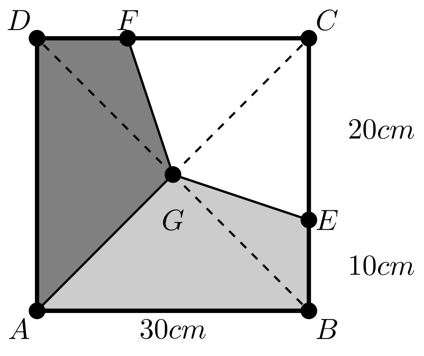
Most próbáljuk meg elosztani a pite belsejét úgy, hogy a határt a fenti három darabra vágjuk. Legyen G a négyzet középpontja, azaz az a pont ami mind a négy oldaltól 15 cm távolságra van. Azt állítjuk, hogy ha az $ABEG$, $ECFG$ és $FDAG$ négyszögekre vágjuk fel a pitét, akkor mindhárom darabnak ugyanakkora lesz a területe és a pite széléből is ugyanannyit tartalmaznak. Azt az előbb már meggondoltuk, hogy így a pite széléből mindhárom darab 40 cm-t tartalmaz, ezért még azt kell megmutatnunk hogy a területük egyenlő.

Húzzuk be gondolatban a BG, CG és DG szakaszokat. Ekkor az $ABEG$ négyszög területe az ABG és a BEG háromszögek területeinek összege. Mivel az AB oldal hossza 30 cm és a G pont 15 cm-re van az AB oldaltól, ezért az ABC háromszög területe $\frac{30 \cdot 15}{2} = 225cm^2$.

Hasonlóan, a BE oldal hossza $10cm$, a G pont pedig a BE oldaltól is $15cm$ távolságra van, így a BEG háromszög területe $\frac{10 \cdot 15}{2} = 75cm^2$. Összesen az $ABEG$ négyszög területe $300cm^2$.

Ugyanilyen módon kiszámolhatjuk a másik két szelet területét is: $T(ECFG) = T(ECG) + T(CFG) = \frac{20 \cdot 15}{2} + \frac{20 \cdot 15}{2} = 300cm^2$ és $T(FDAG) = T(FDG) + T(DAG) = \frac{10 \cdot 15}{2} + \frac{30 \cdot 15}{2} = 300cm^2$.

Tehát a három szelet területe valóban egyforma. Ezzel megmutattuk hogy a javasolt szétvágás olyan amilyet a gyerekek szeretnének, vagyis három darabra vág, és a pite kerületét és a területét is egyenlően osztja fel.



C4. Albrecht furcsa golyóátalakító gépet készített. Ha a gépbe bedobunk egy kék golyót, akkor 5 pirosat ad ki helyette, míg ha egy piros golyót dobunk be, 5 kéket kapunk vissza.
a) Elérhető-e, hogy kétszer annyi kék golyónk legyen, mint piros, ha kezdetben 1 kék golyónk van?
b) Elérhető-e, hogy kétszer annyi kék golyónk legyen, mint piros, ha kezdetben 2 kék golyónk van?
c) Elérhető-e, hogy ugyanannyi piros és kék golyónk legyen, ha kezdetben 1 kék golyónk van?
d) Elérhető-e, hogy ugyanannyi piros és kék golyónk legyen, ha kezdetben 2 kék golyónk van?

Megoldás:

a) Válasz: **Elérhető.**

Elérhető, például az alábbi módon (a táblázat első sora a kezdeti állást mutatja, a sorok végén az ott lévő állásból indított lépés van, vagyis, hogy azok közül a golyók közül milyen színű kerül a gépbe):

kék golyók száma	piros golyók száma	gépbe bedobott golyó színe
1	0	kék
0	5	piros
5	4	piros
10	3	kék
9	8	piros
14	7	

b) Válasz: **Elérhető.**

Szintén elérhető, például az alábbi módon:

kék golyók száma	piros golyók száma	gépbe bedobott golyó színe
2	0	kék
1	5	kék
0	10	piros
5	9	piros
10	8	piros
15	7	piros
20	6	piros
25	5	piros
30	4	kék
29	9	kék
28	14	

c) Válasz: **Nem érhető el.**

Kezdetben 1 kék golyónk van. Minden lépésben a golyók összáma először 1-gyel csökken, majd 5-tel nő, vagyis összességében 4-gyel nő, azaz egy páros számmal. Ez pedig azt jelenti, hogy az aktuális golyóink számának a paritása nem változik. Tehát ha kezdetben összesen 1, azaz páratlan sok golyónk volt, akkor akárhányszor is dobunk be golyót a gépbe mindig páros sok golyónk lesz végül. Viszont ahhoz, hogy valamelyik lépés után a kék golyók száma megegyezzem a pirosakéval összesen páros sok golyó kell, ami az előbbiek miatt sosem állhat elő.

Tehát ha kezdetben 1 kék golyó van, akkor nem érhető el, hogy véges sok lépés után ugyanannyi piros golyónk legyen, mint kék.

d) Válasz: **Nem érhető el.**

Vizsgáljuk a kék és piros golyók számának a különbségét 6-tal való osztási maradék szerint. Belátjuk, hogy ez a lépések során nem változik:

Legyen k és p a piros és kék golyók száma valamely lépés után. Az ezután következő lépésben vagy egy pirosat, vagy egy kéket dobunk be a gépbe:

Ha pirosat: $k' = k + 5$ és $p' = p - 1$ kék és piros golyónk lesz a lépés elvégzése után. Ekkor

$$k' - p' = (k + 5) - (p - 1) = (k - p) + 6.$$

Ha kéket: $k'' = k - 1$ és $p'' = p + 5$ kék és piros golyónk lesz a lépés elvégzése után. Ekkor

$$k'' - p'' = (k - 1) - (p + 5) = (k - p) - 6.$$

Láthatjuk, hogy mindkét esetben $k' - p'$, $k'' - p''$ és $k - p$ 6-tal vett osztási maradékai megegyeznek. Tehát a kék és piros golyók különbségének 6-os osztási maradéka végig nem változik.

Kezdetben 2 darab kék golyónk van és 0 piros, különbségük 2. Az előbbi megállapítás szerint tehát akárhányszor is dobunk valamilyen golyót a pépbe, mindig az adott $k - p$ különbség 6-tal osztva 2-t fog adni maradékul. Ahhoz, hogy a pirosak és kékek száma megegyezzen, viszont értelemszerűen ennek a különbségnek 0-nak kellene lennie, ami 6-tal osztva nem 2-t ad maradékul, tehát ez az eset ugyancsak nem megvalósítható.

Megjegyzés: Ebből az indoklásból természetesen következik a (c) rész is.

C5. Három vámpír falatozik egymásból. Amikor egy vámpír megharap egy másikat, akkor ezzel megszerzi a másik vérét. Ha egy olyan vámpírt harapnak meg, akiben több vámpír vére keveredik, akkor az összes benne lévő vérből jut az őt megharapó vámpírnak is. Egy vámpír nem haraphatja meg egy olyan társát, akiben már benne van a saját vére. (A harapások egymás után történnek.)
A falatozás után mindenki annyi pohár málnaszörpre jogosult, ahány másik vámpír vérét begyűjtötte. Az a céljuk, hogy összesen minél több szörpöt szerezzenek.
a) Adjátok meg a harapásoknak egy olyan sorrendjét, amely minél több szörpöt garantál a vámpíroknak. *Nem baj, ha nem találjátok meg a legjobbat, a részeredményekre is lehet pontot kapni.*
b) Legfeljebb hány pohár szörpöt kaphatnak így? *Adjatok meg minél kisebb olyan számot, amelynél nem lehet több málnaszörpjük. Indokoljátok is meg, hogy ennél miért nem lehet több.*
c) Mi a helyzet, ha a vámpírok 6-an vannak? *Keressetek példát, ahol minél több szörpöt kapnak. Adjatok meg ebben az esetben is minél kisebb olyan számot, amelynél nem kaphatnak többet, indokoljatok is.*

Megoldás:

a) Legyen a három vámpír A, B és C. A következő táblázatban az első sorban a kezdőhelyzet van, majd hogy abban a helyzetben mi történik. (Ugyanígy a többi sorra is.)

A-nál lévő vérek	B-nél lévő vérek	C-nél lévő vérek	Ki harap meg kit
A	B	C	A harapja B-t
A és B	B	C	B harapja C-t
A és B	B és C	C	C harapja A-t
A és B	B és C	C és A és B	A harapja B-t
A és B és C	B és C	C és A és B	-

Láthatjuk, hogy az utolsó sorban elérik azt, hogy 5 pohár szörpöt kapjanak. A következő részben belátjuk, hogy ennél többet nem tudnak elérni.

b) Minden vámpírnál legfeljebb 2 másik vámpír vére lehet a falatozás végén, tehát legfeljebb $3 \cdot 2 = 6$ szörpöt kaphatnak. Most belátjuk, hogy ez nem lehetséges. Tegyük fel, hogy valahogy el tudják érni mégis, hogy 6 szörpöt kapjanak.

Ekkor nézzük az utolsó harapást! Feltehetjük, hogy ekkor A harapta meg B-t vagy C-t. Viszont akkor már B és C nem gyűjtött ez után vért, tehát már ott van náluk a másik két vámpír vére, így A-é is. Tehát A nem haraphatta meg őket utolsó harapásként, azaz nem volt utolsó harapás. Tehát nem volt igaz a feltevésünk, azaz nem kaphattak 6 szörpöt.

c) Hasonló konstrukciót adhatunk 6 vámpír esetén is. Legyenek a vámpírok 1, 2, ..., 6-nak hívva. Ekkor az első harapás legyen az, hogy 1 megharapja 2-t, majd 2 megharapja 3-mat, és így tovább, majd 6 1-et. Ez után ezt a 6 harapást ismételgetve ilyen sorrendben ameddig lehet láthatjuk, hogy amikor nem tudjuk folytatni, akkor mindenkinél előfordul minden lehetséges vér, kivéve 2-t, akinél nem lesz 1-es vér. Tehát ezzel a módszerrel összesen $5 \cdot 5 + 4 = 29$ szörpöt tudnak szerezni.

Most belátjuk hogy ennél többet nem tudnak szerezni. Az biztos, hogy 30-nál nem szerezhetnek többet, hiszen egy ember legfeljebb 5 szörpöt szerezhet és 6-an vannak. Tegyük fel tehát hogy 30-at tudnak szerezni. Ekkor legyen az utolsó harapásban X aki megharap egy másik vámpírt. Mivel azonban aki meg van harapva akkor, az már nem szerezhet több vért, ezért a megharapottnál ott van már a harapásnál X vére. Ez ellentmond a szabályoknak, úgyhogy nem szerezhettek 30 szörpöt, csak 29-et, amire mutattunk is falatozást.