**D1.** Egy pozitív egész számról az alábbi 7 állítást tették:
**I.** A szám kisebb, mint 23. **II.** A szám kisebb, mint 25. **III.** A szám kisebb, mint 27. **IV.** A szám kisebb, mint 29.
**V.** A szám páros. **VI.** A szám hárommal osztható. **VII.** A szám osztható öttel.
Tudjuk, hogy az állítások közül 4 igaz, míg 3 hamis. Adjátok meg a legnagyobb ilyen számot, és indokoljátok, hogy miért nem lehet nagyobb.

**Megoldás:**

Az első 4 állítás közül ha valamelyik nem teljesül, a nála kisebb sorszámúak sem teljesülnek. Az tehát nem lehet, hogy a **IV.** állítás ne teljesüljön, mert akkor lenne legalább 4 hamis állítás a számról. Emiatt a szám "$< 29$", így legfeljebb 28.

Induljunk egyesével lefelé, és nézzük meg melyik a legnagyobb szám, amelyre éppen 4 állítás teljesül.

| | $< 23$ | $< 25$ | $< 27$ | $< 29$ | páros | 3-mal ohó | 5-tel ohó | **igaz állítások** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | Hamis | Hamis | Hamis | Igaz | Igaz | Hamis | Hamis | **2** |
| 27 | Hamis | Hamis | Hamis | Igaz | Hamis | Igaz | Hamis | **2** |
| 26 | Hamis | Hamis | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | Hamis | **3** |
| 25 | Hamis | Hamis | Igaz | Igaz | Hamis | Hamis | Igaz | **3** |
| 24 | Hamis | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | **5** |
| 23 | Hamis | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | Hamis | Hamis | **3** |
| 22 | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | Hamis | **5** |
| 21 | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | Igaz | Hamis | **5** |
| 20 | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | Igaz | **6** |
| 19 | Igaz | Igaz | Igaz | Igaz | Hamis | Hamis | Hamis | **4** |

Láthatjuk, hogy az első szám a 19, amelyre pontosan 4 állítás teljesül, tehát ez lesz a legnagyobb.

**D2.** Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ és a $9$ jegyek mindegyikét pont egyszer felhasználva képzünk négy kétjegyű prímszámot az összes lehetséges módon.
**a)** Adjatok meg egy megfelelő számnégyest!
**b)** Mely számokat kaphatjuk meg a feltételeknek megfelelő számnégyesek összegeként?

**Megoldás:**

**a)** Észrevehetjük, hogy a $2, 4, 5, 6$ jegyek nem állhatnak az egyesek helyén, mert akkor 2-vel vagy 5-tel osztható lenne valamelyik a kétjegyű számok közül, ami így nem lenne prím. Ezek után rövid próbálgatással találhatunk egy megfelelő számnégyest, például a $23, 41, 59, 67$ jó.

**b)** Mivel az egyesek helyén az $1, 3, 7, 9$, a tízesek helyén a $2, 4, 5, 6$ jegyek fognak állni bármely számnégyesben, ezért a négy szám összege csak $1 + 3 + 7 + 9 + 10 \cdot (2 + 4 + 5 + 6) = 190$ lehet.

**D3.** Albrecht szeretné kiválasztani egy szabályos 12-szög minél több csúcsát.
**a)** Legfeljebb hány csúcsot választhat ki úgy, hogy közülük semelyik három ne alkosson derékszögű háromszöget?
**b)** Legfeljebb hány csúcsot választhat ki úgy, hogy közülük semelyik három ne alkosson tompaszögű háromszöget?

**Megoldás:**

**a)** Legyenek a csúcsok körbe $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, és rajzoljuk be a sokszög körülírt körét is. Tegyük fel, hogy Albrecht kiválasztott két szemközti csúcsot, például $A_i$-t és $A_{i+6}$-ot, így $A_iA_{i+6}$ a kör egy átmérője lesz. Ekkor ha kiválasztana egy tetszőleges harmadik csúcsot is (mondjuk $A_j$-t), akkor a Thalesz-tétel miatt $A_iA_jA_{i+6}\sphericalangle = 90°$ lenne, vagyis keletkezne egy derékszögű háromszög.

Tehát ha legalább három csúcsot szeretne kiválasztani, akkor az $(A_1, A_7)$, $(A_2, A_8)$, $(A_3, A_9)$, $(A_4, A_{10})$, $(A_5, A_{11})$, $(A_6, A_{12})$ párok mindegyikéből maximum egy csúcsot választhat ki, vagyis maximum 6 csúcsot lehet kiválasztva.

Ennyit viszont ki is lehet választani, pl $A_1, A_2, \ldots, A_6$ között ha lenne derékszögű háromszög, akkor a Thalesz-tétel megfordítása miatt lenne két csúcs, amelyek a kör egy átmérőjét határozzák meg, vagyis az indexeik különbsége 6, de ilyen pontpár nincs.

**b)** Az előző feladat jelöléseit használjuk. Albrecht 4 csúcsot ki tud választani, ha például azok egy négyzetet (vagy téglalapot) alkotnak: $A_1, A_4, A_7, A_{10}$.

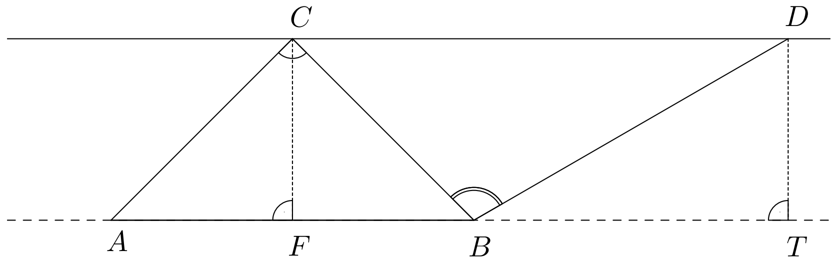
Tegyük fel, hogy legalább 5 csúcsot kiválasztott. Ha többet választott ki, vizsgáljunk csak 5-öt. Megmutatjuk, hogy ezek között is lesz már tompaszögű háromszög.

Nézzük azt az ötszöget, amelyet ez az 5 csúcs határoz meg. Nyilván konvex lesz, tehát minden szöge kisebb, mint 180°. Ha valamelyik szöge nagyobb lenne, mint 90°, akkor ott keletkezne egy tompaszögű háromszög. Ha viszont minden szöge legfeljebb 90°, akkor az ötszög szögeinek összege legfeljebb $5 \cdot 90° = 450°$ lehetne, de tudjuk, hogy minden ötszög szögeinek összege 540°, ez ellentmondás.

**D4.** Legyen az $ABC$ egy egyenlőszárú, derékszögű háromszög, ahol a $C$ csúcsnál van derékszög. A $C$-n keresztül húzzunk az $AB$ szakasszal párhuzamos egyenest, és ezen úgy vegyük fel a $D$ pontot, hogy $AB = BD$ teljesüljön és a $D$ pont közelebb legyen $B$-hez, mint $A$-hoz. Mekkora a $CBD\sphericalangle$?

**Megoldás:**

Készítsünk ábrát a feladat feltételeinek megfelelően. Vetítsük le $C$-t és $D$-t az $AB$ szakasz egyenesére. A talppontok legyenek rendre $F$, és $T$. A vetítés miatt $CF$ és $DT$ merőlegesek lesznek az $AB$ egyenesre.

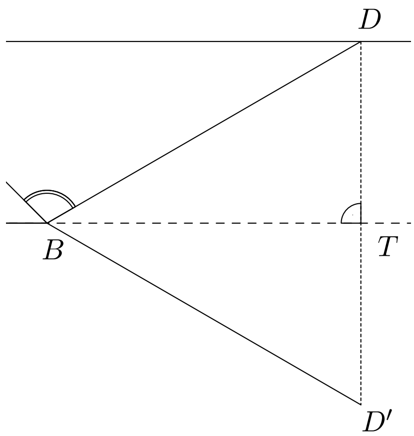



Mivel az $ABC$ háromszög egyenlőszárú, derékszögű háromszög, ezért teljesül, hogy $AC = BC$, valamint $CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 45^\circ$ (utóbbinál kihasználtuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege $180^\circ$, és $C$-nél derékszög van). Hasonlóan kapjuk az $AFC$ és $CFB$ háromszögek szögeinél, hogy $FCA\sphericalangle = FCB\sphericalangle = 45^\circ$. Tehát e két háromszög is egyenlőszárú és derékszögű (mindkét esetben $F$-nél van a derékszög), éppen ezért $AF = FC = FB$, vagyis $F$ felezi az $AB$ szakaszt.

Tudjuk, hogy $CD \parallel AB$, és így $CF \perp CD$, illetve $DT \perp CD$. Viszont ekkor $CF \parallel DT$ (mindkettő merőleges $AB$-re), ami a korábbi egyenlőségek és a feladat feltétele miatt azt jelenti, hogy

$$DT = CF = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BD \qquad (1)$$

Most térjünk át a $BTD$ háromszög vizsgálatára. Tükrözzük $D$-t az $AB$ egyenesre, az így kapott pont legyen $D'$. Mivel a $T$ pont $D$ $AB$-re állított merőlegesének a talppontja volt, valamint a tengelyes tükrözés távolságtartása miatt $DT = TD'$. Hasonló megfontolásból $DB = BD'$. Az (1) egyenlet miatt ekkor fennáll, hogy $DB = BD' = DD'$. Tehát a $BDD'$ háromszög szabályos, így minden szöge $60^\circ$-os. A tengelyes tükrözés szögtartásából adódóan viszont akkor $DBT\sphericalangle = TBD'\sphericalangle = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.




Végül a keresett szög nagysága: $CBD\sphericalangle = 180^\circ - ABC\sphericalangle - DBT\sphericalangle = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

**D5.** Legyenek az $a$, $b$ és $c$ olyan természetes számok, melyekre $a \mid b^2$, $b \mid c^2$ és $c \mid a^2$ teljesül.
**a)** Van ilyen feltételekkel olyan $a, b, c$ számhármas, melyre nem igaz, hogy $abc \mid (a+b+c)^6$?
**b)** Mutassuk meg, hogy minden a feltételt teljesítő $a, b, c$ számhármasra $abc \mid (a+b+c)^7$.
*Megjegyzés: $x \mid y$ azt jelenti, hogy $x$ osztója $y$-nak.*

## Megoldás:

**a)** Az $a = 4$, $b = 2$ és $c = 16$ számhármas ellenpélda. Valóban, $4 \mid 2^2$, $2 \mid 16^2$ és $16|4^2$ is teljesül, ellenben $abc = 2^7$, $a+b+c = 22$ és $2^7$ nem osztója $22^6$-nak.

**b)** Ha az $(a+b+c)^7$ szorzatot kifejtjük, akkor a következő összeget kapjuk:

$$\sum_{i+j+k=7} c_{i,j,k} a^i b^j c^k,$$

ahol $0 \leq i, j, k \leq 7$ és $c_{i,j,k}$ pozitív egész szám. A fenti összeg mindegyik tagjáról meg fogjuk mutatni, hogy osztható $abc$-vel.

Feltehető, hogy $i \leq j \leq k$. Ha $i, j, k \geq 1$, akkor nyilván $abc \mid a^i b^j c^k$. Ha $i = j = 0$, akkor $k = 7$. Mivel $b \mid c^2$, ezért $b^2 \mid c^4$ és így $a \mid b^2 \mid c^4$. Emiatt $abc \mid c^4 \cdot c^2 \cdot c = c^7 = a^i b^j c^k$.

Ha $i = 0$, de $j, k \neq 0$, akkor $j + k = 7$. Ha $j \geq 3$, akkor $ab \mid b^j$ és $c \mid c^k$, tehát $abc \mid b^j c^k = a^i b^j c^k$. Ha pedig $j \leq 2$, akkor $k \geq 5$. Ebben az esetben $ac \mid c^4 \cdot c \mid c^k$, és $b \mid b^j$. Így szintén $abc \mid b^j c^k = a^i b^j c^k$.

Tehát azt kaptuk, hogy a $\sum_{i+j+k=7} c_{i,j,k} a^i b^j c^k$ összegben minden tag osztható $abc$-vel, tehát igaz a feladat állítása.