E kategória

# Matematika megoldókulcs

XII. Dürer Verseny

Első forduló: 2018. november 9.

---

**E1.** Az $a$, $b$, $c$, $d$ természetes számokról tudjuk, hogy $a+b+c+d=100$, valamint, hogy létezik olyan $n$ természetes szám, amelyre

$$a+n=b-n=c\cdot n=\frac{d}{n}$$

Adjátok meg az összes olyan $(a,b,c,d,n)$ számötöst, melyre teljesülnek ezek a feltételek!

**Megoldás:**

Legyen $a+n=b-n=c\cdot n=\frac{d}{n}=x$, ahol $x$ pozitív egész. Ekkor $a=x-n$ , $b=x+n$ , $c=\frac{x}{n}$ , $d=n\cdot x$.

Az $a+b+c+d=100$ feltétel miatt $(x-n)+(x+n)+\frac{x}{n}+nx=100$, innen adódik: $x(n^2+2n+1)=x\cdot(n+1)^2=100n$.

Felhasználva, hogy $x=c\cdot n$ , kapjuk: $c\cdot(n+1)^2=100$, tehát mindkét tényezőnek négyzetszámnak kell lennie. Négy esetet vizsgálunk meg ($c|100$ alapján)

1. eset: Ha $c=1$, akkor $n=9$ és $x=9$. Így $a=0$, $b=18$, $c=1$ és $d=81$ adódik. Ez valóban megoldás.

2. eset: Ha $c=4$, akkor $n=4$ és $x=16$. Így $a=12$, $b=20$, $c=4$ és $d=64$ adódik. Ez valóban megoldás.

3. eset: Ha $c=25$, akkor $n=1$ és $x=25$. Így $a=24$, $b=26$, $c=25$ és $d=25$ adódik. Ez valóban megoldás.

4. eset: Ha $c=100$, akkor $n=0$ adódik. Ez nem megoldás.

Tehát az következő három $(a,b,c,d,n)$ számötös felel meg a feladat feltételeinek: $(0,18,1,81,9)$, $(12,20,4,64,4)$ és $(24,26,25,25,1)$.

Könnyen lehet ellenőrizni, hogy ezek valóban jó megoldások.

**E2.** **a)** 11 kajakos evez a Dunán Szentendréről a Kopaszi-gátra. Nem feltétlenül indulnak egyszerre, de azt tudjuk, hogy mindegyikük egyenletes sebességgel halad (ugyanazon az úton). Ha egyikük leelőzi a másikat, akkor összepacsiznak. Miután megérkeztek, mindegyikük azt állítja, hogy pontosan 10 emberrel pacsizott. Mutassátok meg, hogy tudtak úgy evezni, hogy ez lehetséges legyen.
**b)** Egy másik alkalommal 13 kajakos evezett ily módon, ekkor a célban mindegyikük azt állította, hogy pontosan 6 emberrel pacsizott. Mutassátok meg, hogy volt közülük olyan, aki elszámolta magát.

**Megoldás:**

**a)** Egy lehetséges megoldás a következő: a versenyzők sebességük szerint fordított sorrendben álltak a rajthoz, azaz a leglassabb versenyző indult elsőként, a leggyorsabb pedig utolsóként. Jegyezzük meg, hogy tetszőleges két versenyző esetén, ha a pálya elég hosszú, a később induló, gyorsabb versenyző beelőzi az előtte induló, lassabb versenyzőt. Ha tehát a pálya elég hosszú, a célba érés sorrendje épp a fordítottja az indulási sorrendnek, tehát az összes lehetséges előzés megtörténik, így minden versenyző az összes másikkal összepacsizott. Szóval ha az evezők közvetlen egymás után indulnak ilyen sorrendben, akkor mindenki pacsizik mindenkivel.

**b)** Tegyük fel, hogy senki sem tévedett, mindenki hat másik emberrel pacsizott. A leghamarabb induló versenyző pontosan akkor pacsizott valakivel, ha az megelőzte őt a beérkezés sorrendjében. Mivel a leghamarabb induló evezős pontosan hat emberrel pacsizott, így pontosan hat ember előzte meg, azaz hetedik helyen végzett (döntetlen esetén a beérési sorrendben azt írjuk előrébb, aki hamarabb indult). Hasonlóan, a legkésőbb induló kajakos csak úgy pacsizhatott, ha beelőzött valakit. Tehát pontosan hat embert előzött meg, így hetedik helyen végzett. Így két ember is a hetedik helyen kellett volna, hogy végezzen, ami ellentmondás. Tehát valaki szükségszerűen nem hat emberrel pacsizott, így valaki elszámolta magát.

**E3.** **a)** A következő játékot játsszuk a jobb oldali táblázatban:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Minden lépésben kiválaszthatjuk a táblázat egyik sorát vagy oszlopát, és a benne szereplő három mező közül két szomszédosban 1-gyel csökkentjük a számot, a harmadikban pedig 1-gyel növeljük. Elérhetjük-e néhány ilyen lépéssel, hogy minden szám azonos legyen?

**b)** Most lehetőségünk van arra, hogy a kiindulási helyzetben 1-től 9-ig az egész számokat tetszőleges sorrendben helyezzük el a $3 \times 3$-as táblázatban. A lehetséges lépéseink nem változtak. Továbbra is az a célunk, hogy minden szám azonos legyen, de szeretnénk azt is, hogy a végén ez a 9-szer szereplő szám minél nagyobb legyen. Mekkora az a legnagyobb érték, amelyet így el tudunk érni?

**Megoldás:**

**a)** Először is látható, hogy a 9 szám összege minden lépésben 1-gyel csökken, hiszen két számot csökkentünk 1-gyel és egyet növelünk. Továbbá vegyük észre, hogy a 4 sarokban lévő számok összege állandó. (Ha középső sorban vagy oszlopban hajtunk végre lépést, akkor nem változik, ha pedig szélsőben, akkor az egyik sarokmezőt növeljük, a másikat csökkentjük 1-gyel.)

Tegyük fel, hogy elérhető a csupa azonos szám. Ekkor ha a végállapotban minden mezőben $n$ szerepel, akkor a négy sarokban a számok összege $4n$, és ez állandó, tehát a kezdőállapotban is ennyi volt. A kezdőállapotban ez az érték $1 + 3 + 7 + 9 = 20$, tehát $n = 5$. Ez azonban azt jelenti, hogy a végállapotban a 9 szám összege 45. Viszont kezdetben is 45, és minden megtett lépés 1-gyel csökkenti a teljes összeget, így bármilyen lépéssorozattal csak 45 alatti összeget lehetne elérni. Ez ellentmondás, a 9 azonos szám nem érhető el.

**b)** Az előző gondolatmenet megmutatja, hogy ha a végállapotban csupa $n$ van, akkor $n < 5$. (Hiszen kezdetben még mindig 45 a számok összege, míg a végállapotban $9n$, aminek 45-nél kevesebbnek kell lennie.) Az $n = 4$ megvalósítható, például az alábbi táblázattal és lépésekkel:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kezdőállapot: | 1 | 8 | 5 |
| | 6 | 9 | 4 |
| | 7 | 2 | 3 |
| A harmadik sorban végzünk egy lépést, a jobb oldali számot növelve: | 1 | 8 | 5 |
| | 6 | 9 | 4 |
| | 6 | 1 | 4 |
| A második oszlopban végzünk három lépést, az alsó számot növelve: | 1 | 5 | 5 |
| | 6 | 6 | 4 |
| | 6 | 4 | 4 |
| Az első sorban végzünk egy lépést, a bal oldali számot növelve: | 2 | 4 | 4 |
| | 6 | 6 | 4 |
| | 6 | 4 | 4 |
| Az első oszlopban végzünk két lépést, a felső számot növelve: | 4 | 4 | 4 |
| | 4 | 6 | 4 |
| | 4 | 4 | 4 |
| A második sorban végzünk egy lépést, a bal oldali számot növelve: | 4 | 4 | 4 |
| | 5 | 5 | 3 |
| | 4 | 4 | 4 |
| Végül a második sorban végzünk még egy lépést, a jobb oldali számot növelve: | 4 | 4 | 4 |
| | 4 | 4 | 4 |
| | 4 | 4 | 4 |

**E4.** Az első síknegyed minden egész koordinátájú pontjára írunk egy számot a következőképpen: Ha a pont legalább egyik koordinátája 0, akkor 0-t írunk, egyéb esetben pedig az $(a, b)$ pontra írt szám eggyel nagyobb, mint az $(a+1, b-1)$ és az $(a-1, b+1)$ pontokra írt számok átlaga. Mely számokat írhatjuk a $(121, 212)$ koordinátájú pontra?
*Megjegyzés: Az első síknegyedbe tartoznak azok a pontok, amelyeknek mindkét koordinátája nemnegatív.*

**Megoldás:**

A cél, hogy belássuk, hogy az $(x, y)$ pontra írt szám éppen $x$ és $y$ szorzata. Legyen $x + y = c$ és a $(c-n, n)$ pontra írt szám legyen $a_n$. Ekkor vannak $a_1, a_2, \ldots, a_c$ számaink, amik az alábbi módon függenek össze:

$$a_0 = a_c = 0$$

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} + 1,\ \ n = 1, 2, \ldots, c-1$$

A kérdés, hogy mennyi $a_y$. Tegyük fel, hogy $a_1$ (ami a $(c-1, 1)$ pontra írt érték, amitől azt várjuk, hogy $c-1$ legyen) az $c-1+d$, ahol $d$ a hiba. Teljes indukció segítségével azt fogjuk belátni, hogy ekkor:

$$a_n = (c-n)n + nd,\ \ n = 0, 1, \ldots, c$$

és így ha megnézzük $n = c$-re a fenti kifejezést, azt kapjuk, hogy $cd = 0$, azaz $d = 0$ és így $a_n = (c-n)n + nd = (c-n)n$, vagyis $a_y = (c-y)y = xy$, ami éppen amit akartunk.
A teljes indukció: Az állítás teljesül, ha $n = 0$ vagy $n = 1$, ez lesz a kezdő lépés.
Most a $a_n = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2} + 1$ rekurziót átrendezve és kihasználva az indukciós feltevést $n$ és $n-1$ esetekre, azt kapjuk, hogy:

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 2 = 2(c-n)n + 2dn - (c-n+1)(n-1) - d(n-1) - 2 =$$

$$(c-n-1)(n+1) + d(n+1)$$

és ezzel az indukciós állítást is beláttuk. Most az $(x, y)$-ra kapott képletet alkalmazva a $(121, 212)$ pontra azt kapjuk, hogy arra csak a $121 \cdot 212 = 25652$ szám lehet írva.

**2. Megoldás:** Vegyük észre, hogy ha az $(x, y)$ pontra az $x \cdot y$ értéket írjuk, az jó lesz. Megmutatjuk, hogy más nem lehet.

Tegyük fel, hogy kétféleképpen is kitöltöttük. Nézzük most is a valamilyen rögzített $c$-re a $(c-n, n)$ pontokra írt számokat. Legyenek ezek az egyik kitöltésben $a_0, a_1, \ldots a_c$, a másikban $b_0, b_1, \ldots b_c$. Nézzük a különbségüket: $d_n = a_n - b_n$.

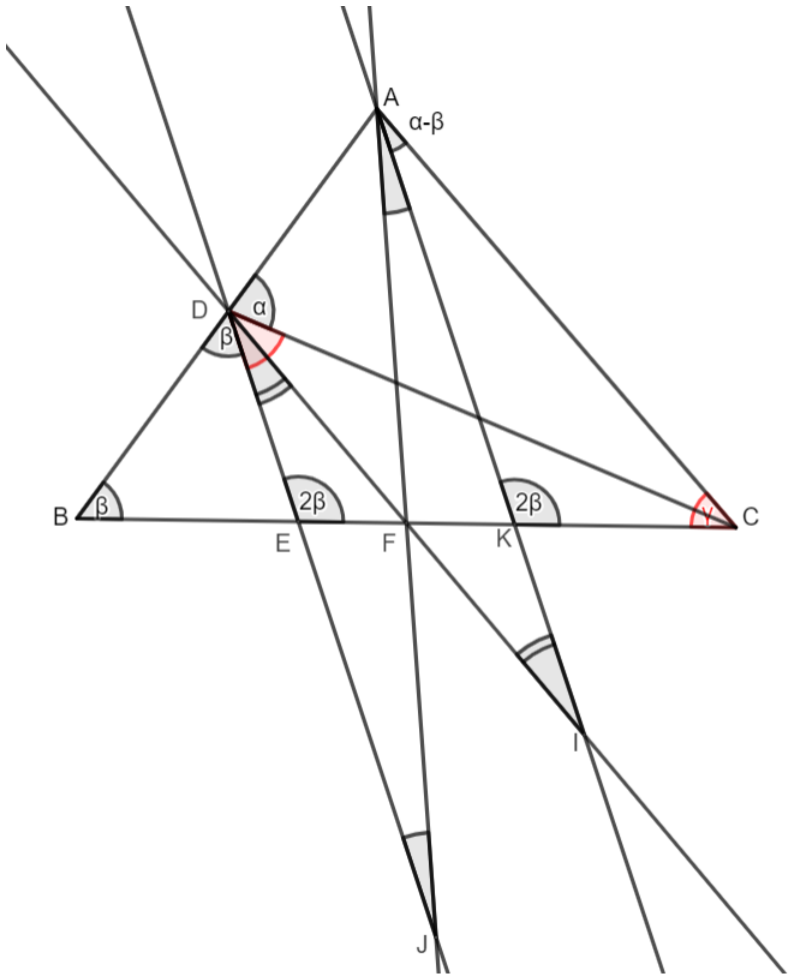
Ha $1 \leq n \leq c$, akkor

$$d_n = a_n - b_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} + 1 - \frac{b_{n+1} + b_{n-1}}{2} - 1 = \frac{(a_{n+1} - b_{n+1}) + (a_{n-1} - b_{n-1})}{2} = \frac{d_{n-1} + d_{n+1}}{2},$$

tehát $d_n$ egy számtani sorozat. Ugyanakkor $d_0 = d_c = 0 - 0 = 0$, vagyis a számtani sorozatban van két azonos elem, emiatt az egész sorozat konstans 0 lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy minden $n$-re $a_n = b_n$, vagyis a kitöltés egyértelmű. Vagyis a $(121, 212)$ pontra csak a $121 \cdot 212 = 25652$ kerülhet.

**E5.** Legyen $ABC$ egy olyan háromszög, mely nem derékszögű és melyre $AC \neq BC$. Legyen $F$ a $BC$ oldal felezőpontja. Legyen $D$ az $AB$ egyenesen egy olyan pont, amelyre $CA = CD$, és legyen $E$ $BC$ egyenesen egy pont, úgy, hogy $EB = ED$ teljesüljön. Az $A$-n áthaladó, $ED$-vel párhuzamos egyenes messe az $FD$ egyenest az $I$ pontban. $AF$ egyenes messe az $ED$ egyenest a $J$ pontban. Bizonyítsátok be, hogy a $C$, $I$ és $J$ pontok egy egyenesre esnek.

**Megoldás:**




Legyen a háromszögben $A$-nál $\alpha$, $B$-nél $\beta$, $C$-nél pedig $\gamma$ szög. Mivel $ADC\triangle$ és $DBE\triangle$ egyenlőszárú, így $EDC\sphericalangle = \gamma$ és $CED\sphericalangle = 2\beta$. Legyen $AI \cap BC = K$. Mivel $AK \parallel DE$, így $KAB\sphericalangle = EDB\sphericalangle = BDE\sphericalangle = \beta$. Vagyis $KAC\sphericalangle = \alpha - \beta$, ami azt jelenti, hogy $CKA\sphericalangle = 180° - \gamma - \alpha + \beta = 2\beta$. Ekkor $DEC\triangle$ és $CKA\triangle$ szögei megegyeznek, sőt $DC = AC$, így ez a két háromszög egybevágó is. Így $DE = KC$ és $EC = AK$. Azonban $DE = BE = KC$, így (mivel $F$ felezi a $BC$ oldalt) $EF = FK$.

Mivel $DE \parallel AK$, így $KAF\sphericalangle = FJE\sphericalangle$ és $AIF\sphericalangle = DEF\sphericalangle$. Tehát – mivel a szögeik és egy oldaluk megegyezik – $AFK\triangle \cong EFJ\triangle$ és $DEF\triangle \cong FIK\triangle$, amiből következik, hogy

$$EJ = AK = EC$$

és

$$KI = ED = KC$$

Innen már következik, hogy $ECI\sphericalangle = ECJ\sphericalangle$, azaz a $C$, $I$ és $J$ pontok valóban egy egyenesre esnek.