



1. a) A következő játékot játsszuk a jobb oldali táblázatban:

Minden lépésben kiválaszthatjuk a táblázat egyik sorát vagy oszlopát, és a benne szereplő három mező közül két szomszédosban 1-gyel csökkentjük a számot, a harmadikban pedig 1-gyel növeljük. Elérhetjük-e néhány ilyen lépéssel, hogy minden szám azonos legyen?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

b) Most lehetőségünk van arra, hogy a kiindulási helyzetben 1-től 9-ig az egész számokat tetszőleges sorrendben helyezzük el a  $3 \times 3$ -as táblázatban. A lehetséges lépéseink nem változtak. Továbbra is az a célunk, hogy minden szám azonos legyen, de szeretnénk azt is, hogy a végén a mezőkben szereplő közös szám minél nagyobb legyen. Mekkora az a legnagyobb érték, amelyet így el tudunk érni?

2. Jelölje egy  $n$  pozitív egészre  $P(n)$  azon  $p$  prímekek halmazát, melyekre léteznek  $a, b$  pozitív egészek úgy, hogy  $n = a^p + b^p$ . Igaz-e, hogy tetszőleges, prímekből álló  $H$  véges halmazra létezik olyan  $n$ , hogy  $P(n) = H$ ?

3. Anna gondolt egy véges  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ponthalmazra. Béla nem tudja, hogy  $A$ -nak hány eleme van, de az a célja, hogy meghatározza  $A$ -t. Ehhez Béla tetszőleges  $b \in \mathbb{R}^2$  pontra megkérdezheti, hogy milyen messze van  $A$ -tól. Erre Anna meg is mondja a távolságot, azaz  $\min\{d(a, b) \mid a \in A\}$  értékét. (Itt  $d(a, b)$  az  $a, b \in \mathbb{R}^2$  pontok távolságát jelenti.) Ilyen kérdésekből Béla tetszőlegesen sokat feltehet egészen addig, amíg biztosan meg nem tudja határozni  $A$ -t.

a) Meg tudja-e tenni Béla ezt véges sok kérdéssel?

b) És ha Anna előre elárulja, hogy  $A$  minden pontjának mindkét koordinátája a  $[0, 1]$  intervallumba esik?

*Megjegyzés:  $\mathbb{R}^2$  a sík pontjainak halmaza.*

4. Egy irracionális számokból álló  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  szám  $n$ -est *földöntúlinak* nevezünk, ha akármilyen nemnegatív racionális  $q_1, q_2, \dots, q_n$  együtthatókra  $q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n$  irracionális, ahol a  $q_i$ -k nem mind nullák. Lássuk be, hogy bármely  $2n - 1$  különböző irracionális számból kiválasztható egy földöntúli  $n$ -es.

5. Az  $ABC$  és  $A'B'C'$  hasonló, ellentétes körüljárású háromszögek, melyek magasságpontja megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy az  $AA', BB', CC'$  egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.*

*A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!*