E+1. **a)** A következő játékot játsszuk a jobb oldali táblázatban:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Minden lépésben kiválaszthatjuk a táblázat egyik sorát vagy oszlopát, és a benne szereplő három mező közül két szomszédosban 1-gyel csökkentjük a számot, a harmadikban pedig 1-gyel növeljük. Elérhetjük-e néhány ilyen lépéssel, hogy minden szám azonos legyen?

b) Most lehetőségünk van arra, hogy a kiindulási helyzetben 1-től 9-ig az egész számokat tetszőleges sorrendben helyezzük el a 3×3-as táblázatban. A lehetséges lépéseink nem változtak. Továbbra is az a célunk, hogy minden szám azonos legyen, de szeretnénk azt is, hogy a végén a mezőkben szereplő közös szám minél nagyobb legyen. Mekkora az a legnagyobb érték, amelyet így el tudunk érni?

Megoldás:

a) Először is látható, hogy a 9 szám összege minden lépésben 1-gyel csökken, hiszen két számot csökkentünk 1-gyel és egyet növelünk. Továbbá vegyük észre, hogy a 4 sarokban lévő számok összege állandó. (Ha középső sorban vagy oszlopban hajtunk végre lépést, akkor nem változik, ha pedig szélsőben, akkor az egyik sarokmezőt növeljük, a másikat csökkentjük 1-gyel.)

Tegyük fel, hogy elérhető a csupa azonos szám. Ekkor ha a végállapotban minden mezőben n szerepel, akkor a négy sarokban a számok összege $4n$, és ez állandó, tehát a kezdőállapotban is ennyi volt. A kezdőállapotban ez az érték $1 + 3 + 7 + 9 = 20$, tehát $n = 5$. Ez azonban azt jelenti, hogy a végállapotban a 9 szám összege 45. Viszont kezdetben is 45, és minden megtett lépés 1-gyel csökkenti a teljes összeget, így bármilyen lépéssorozattal csak 45 alatti összeget lehetne elérni. Ez ellentmondás, a 9 azonos szám nem érhető el.

b) Az előző gondolatmenet megmutatja, hogy ha a végállapotban csupa n van, akkor $n < 5$. (Hiszen kezdetben még mindig 45 a számok összege, míg a végállapotban $9n$, aminek 45-nél kevesebbnek kell lennie.) Az $n = 4$ megvalósítható, például az alábbi táblázattal és lépésekkel:

Kezdőállapot:	1	8	5
	6	9	4
	7	2	3
A harmadik sorban végzünk egy lépést, a jobb oldali számot növelve:	1	8	5
	6	9	4
	6	1	4
A második oszlopban végzünk három lépést, az alsó számot növelve:	1	5	5
	6	6	4
	6	4	4
Az első sorban végzünk egy lépést, a bal oldali számot növelve:	2	4	4
	6	6	4
	6	4	4
Az első oszlopban végzünk két lépést, a felső számot növelve:	4	4	4
	4	6	4
	4	4	4
A második sorban végzünk egy lépést, a bal oldali számot növelve:	4	4	4
	5	5	3
	4	4	4
Végül a második sorban végzünk még egy lépést, a jobb oldali számot növelve:	4	4	4
	4	4	4
	4	4	4

E+2. Jelölje egy n pozitív egészre $P(n)$ azon p prímek halmazát, melyekre léteznek a, b pozitív egészek úgy, hogy $n = a^p + b^p$. Igaz-e, hogy tetszőleges, prímekből álló H véges halmazra létezik olyan n, hogy $P(n) = H$?

Megoldás:

Azt fogjuk megmutatni, hogy minden megfelelő H halmazra létezik egy n, melyre $P(n) = H$.

Amennyiben H üres, $n = 3$ megfelel, hiszen ha $3 = a^p + b^p$, akkor $a, b < 3$ tehát $a = 1$ és $b = 2$ (vagy fordítva). Ekkor viszont $2^p > 3$, tehát $P(3)$ üres.

Innen kezdve tegyük fel, hogy H nem üres. Először szeretnénk egy olyan n-et mutatni H-hoz, melyre teljesül $H \subseteq P(n)$. Könnyen látható, hogy ha $a = b$ esetén ha $n = 2a^p$, akkor $p \in P(n)$. Ha azt szeretnénk, hogy ez teljesüljön minden p_i prímre H-ból ($i = 1, 2, ..k$), akkor láthatjuk hogy $n = 2^{1+p_1p_2...p_k}$ megfelel, tehát $H \subseteq P(n)$.

Most megmutatjuk hogy erre az n-re egyetlen másik prím sincs benne $P(n)$-ben. Tegyük fel hogy $n = a^q + b^q$ de $q \notin H$.

<u>1. eset:</u> $q = 2$: Dolgozzunk indirekten! Ekkor $p_i \in H$ páratlan ($q \notin H$), tehát $n = 4^k$ valamilyen k egészre, és $4^k = a^2 + b^2$. A négyzetszámok 4-es maradéka 0 vagy 1, így mivel a bal oldal 4-es maradéka 0, a és b is páros. Ekkor ha az egyenlet mindkét oldalát leosztjuk 4-el, akkor egy hasonló egyenletet kapunk: $4^{k-1} = a_1^2 + b_1^2$ ahol $a_1 = \frac{a}{2}$, $b_1 = \frac{b}{2}$. Látható, hogy az előző érvelés működik, amíg a bal oldalon a 4 kitevője pozitív, tehát ha $a_i = \frac{a}{2^i}$ ($i = 1, 2, ..., k-1, k$), akkor $4^{k-i} = a_i^2 + b_i^2$. $i = k$: $1 = a_k^2 + b_k^2$, de mivel $a,\ b > 0$ így $a_i,\ b_i > 0$ és $a_i,\ b_i$ egész, tehát $1 = a_k^2 + b_k^2$ nem teljesülhet. Tehát ekkor $q \notin P(n)$.

<u>2. eset</u> q páratlan: Dolgozzunk indirekten! Tegyük fel, hogy $n = 2^k = a^q + b^q = (a+b)(a^{q-1} - a^{q-2}b \pm ... - b^{q-1})$. Mivel a és b azonos paritású, ha páratlanok, akkor a második zárójelbeli kifejezés páratlan, és osztja 2^k-t, így az csak is 1 lehet. Ekkor $a + b = a^q + b^q = n$, ahol $a,\ b > 0$ és q prím. Ez nem lehetséges, tehát mind a mind b páros. Legyen $a_i = \frac{a}{2^i}$, $b_i = \frac{b}{2^i}$ ($i = 0, 1, ..., k$). Hasonlóan a fenti gondolatmenethez, $2^{k-i} = a_i^q + b_i^q$-ból következik az állítás $(i+1)$-re, így igaz lesz a következő: $2^{k-k} = 1 = a_k^q + b_k^q$. Mivel $a_i, b_i > 0$ egészek, ezért ez nem lehetséges. Tehát $q \notin H$.

A fentebbiek miatt $H \subseteq P(n)$ és $x \notin H \implies x \notin P(n)$, tehát $H = P(n)$. Ezzel minden H-ra megadtunk egy megfelelő n-et. Ezzel a megoldást befejeztük.

E+3. Anna gondolt egy véges $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ponthalmazra. Béla nem tudja, hogy A-nak hány eleme van, de az a célja, hogy meghatározza A-t. Ehhez Béla tetszőleges $b \in \mathbb{R}^2$ pontra megkérdezheti, hogy milyen messze van A-tól. Erre Anna meg is mondja a távolságot, azaz $\min\{d(a,b) \mid a \in A\}$ értékét. (Itt $d(a,b)$ az $a, b \in \mathbb{R}^2$ pontok távolságát jelenti.) Ilyen kérdésekből Béla tetszőlegesen sokat feltehet egészen addig, amíg biztosan meg nem tudja határozni A-t.
a) Meg tudja-e tenni Béla ezt véges sok kérdéssel?
b) És ha Anna előre elárulja, hogy A minden pontjának mindkét koordinátája a $[0,1]$ intervallumba esik?
Megjegyzés: $\mathbb{R}^2$ a sík pontjainak halmaza.

Megoldás:

a) Nem lehetséges. Tegyük fel, hogy Béla megállna és meghatározná a ponthalmazt. Ekkor tudnánk mutatni egy olyan pontot, amiről nem tudná eldönteni, hogy benne van vagy sem. Legyen a legnagyobb válaszként kapott szám az a. Ekkor vegyünk egy olyan pontot, ami az összes kérdezett ponttól több mint a távolságra van. (Ilyennek kell lennie, hiszen a síkból véges sok darab véges területű rész, csak véges sok területet tud kivágni.) Erről a pontról megállapíthatjuk, hogy Béla nem tudja eldönteni, hogy benne van-e, mivel akár benne van, akár nincs, mindkét esetben ugyanazokat a válaszokat kapná.

b) Lehetséges. Az alábbiakban megadunk egy lépéssort, amit ismételgetve előbb-utóbb ki tudjuk találni a ponthalmazt. Kezdetben legyen $k = 1$, majd a lépéssor minden sikertelen végigfuttatása után növeljük meg 1-gyel k értékét (tehát k a "ciklusváltozó", ami azt jelzi, hogy hányadszor futtatjuk végig a lépéssort).

1. lépés: Osszuk fel a $[0,1]^2$ négyzetet rácsszerűen $k \times k$ db $\frac{1}{k}$ oldalhosszú négyzetre.

2. lépés: A négyzetrács keletkező $(k+1)^2$ rácspontjára rákérdezünk, és feljegyezzük távolságaikat A-tól. Minden olyan rácspontot, ami legfeljebb $r_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{k}$ távolságra van A-tól, zöldre színezünk.

Fontos kitérő:

Gondoljuk meg, hogy kellően részletes felosztás esetén hogyan fognak a zöld pontok elhelyezkedni. Legyen $|A| = n$. (n értékét nem ismerjük.) Minden A-beli pont körül tudunk gondolatban egy-egy azonos sugarú piros kört rajzolni úgy, hogy az n kör összes pontjára teljesüljön, hogy a legközelebbi A-beli pont az őt tartalmazó kör középpontja legyen (például ha a pontok páronkénti távolságainak minimuma d, akkor mindegyik pont körül rajzolhatunk egy $\frac{d}{3}$ sugarú kört; könnyű látni, hogy ez jó lesz). És nyilván vehetünk a körök helyett ugyanígy piros négyzeteket (pl. minden körbe írjunk négyzetet), legyen azok oldalhossza f. Ha a felosztásunk olyan finom, hogy két rácsvonal távolsága mondjuk $\frac{f}{100}$ alatt van, akkor minden középponttól balra, jobbra, felfelé és lefelé is min. 49-49 rácsvonal lesz a piros négyzet széléig.

Mivel r_k a rácsnégyzet átlójának fele, minden A-beli P ponthoz ha vesszük az őt tartalmazó rácsnégyzet négy csúcsát, akkor közülük legalább 1 zöld lesz (mert a csúcsokból felmért r_k sugarú negyedkörök lefedik a rácsnégyzetet). És P legfeljebb 4 rácspontot színezhet zöldre, mert könnyen látszik, hogy az olyan csúcsok, amik nem a P-t tartalmazó rácsnégyzet csúcsai, legalább $\frac{1}{k}$ távolságra vannak P-től. Illetve látható, hogy a rácsvonalon lévő P pont 1 vagy 2, az esetleges P rácspont pedig 1 zöld rácspontot hoz létre. Tehát minden P pont 1 és 4 közti számú rácspontot színez zöldre, és ezek a rácspontok egy 2×2-es rácspont-négyzeten belül helyezkednek el.

Az említett finom felosztás esetén a zöld rácspontok egy-egy A-beli pont körül 1, 2 vagy 4 tagú csoportban fordulnak elő, az f oldalhosszú négyzeteken belül. Tehát egy négyzet 1 és 4 közti számú zöld rácspontot tartalmaz, és azok egy csoportban vannak a négyzet közepén, úgy, hogy tőlük minden irányban legalább 48 rácsvonalnyi távolságra van a négyzet széle. Így bármely két zöld csoport között vízszintesen vagy függőlegesen legalább 96 köztes rácsvonal van (mivel két zöld csoport két különböző négyzetben található).

3. lépés: Vizsgáljuk meg, hogy a zöld pontok az említett struktúrában helyezkednek-e el (1 és 4 közti elemszámú csoportokban úgy, hogy minden csoport egy 2×2-es rácspont-négyzeten belül helyezkedik el és bármely két csoport között legalább 96 köztes rácsvonal van legalább az egyik irányban).

Ha nem, akkor kezdjük elölről a ciklust (k értékét eggyel növelve).

4. lépés: Ha ilyen struktúrában vannak, akkor van rá remény, hogy kitaláljuk az A halmazt. Minden zöld csoport köré vegyünk fel egy négyzetet, aminek minden szélétől a csoport minden pontja legalább 3, legfeljebb 10 rácsvonal távolságra van. (Ezt könnyű megvalósítani, mert a zöld csoport pontjai egymástól mindkét irányban max. 1 rácsvonalnyira vannak.) A négyzet csúcsait $QRST$-vel jelölve, kérdezzük meg a $q = d(A, Q)$, $r = d(A, R)$, $s = d(A, S)$, $t = d(A, T)$ távolságokat. $QRST$ biztosan tartalmazza az összes A-beli pontot, ami az adott zöld csoport pontjait kizöldítette (azaz $\frac{\sqrt{2}}{2}$ rácsvonalnál közelebb van hozzájuk). Továbbá a zöld csoportok közti nagy távolságok miatt q, r, s, t a $QRST$-n belüli legközelebbi A-beli ponttól való távolságot takarja (nem feltétlenül ugyanattól a ponttól valót). A négy csúcstól való távolságok alapján kitalálhatjuk, hogy egy A-beli pont van-e $QRST$-ben vagy pedig több. Hiszen ha a négy ponttól való q, r, s, t távolságokat ki lehet elégíteni egyetlen P ponttal a négyzetben, akkor $q = QP$, $r = RP$, $s = SP$, $t = TP$. Így ha egy több pontból álló H ponthalmazzal is kielégíthető ez a négy távolság, akkor H semelyik pontja nem lehet Q-hoz közelebb, mint P; nem lehet R-hez közelebb, mint P; ugyanígy S-re és T-re is. Azonban a négyzeten belül bármely P-től eltérő pont közelebb fog esni valamelyik csúcshoz, mint P. Így H is csak P-t tartalmazhatja, ami ellentmondás.

Így megállapítható, hogy ezekben a négyzetekben egy vagy több pont lapul-e, és ha mindegyikben egy, akkor a négy megkérdezett távolság alapján egyértelműen kideríthető a pont a fenti gondolatmenet alapján (mivel ha H egyelemű, akkor is csak $\{P\}$ lehet). Máskülönben továbbmegyünk a folyamattal, és a kitérőben leírtak alapján eljutunk egy olyan finomságig egy idő után, amelyben már minden zöld csoporthoz pontosan egy A-beli pont tartozik, és ekkor a 4. lépéssel kitalálhatjuk a pontokat.

E+4. Egy irracionális számokból álló $(x_1, x_2, ..., x_n)$ szám n-est *földöntúlinak* nevezünk, ha akármilyen nemnegatív racionális q_1, q_2, ..., q_n együtthatókra $q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_nx_n$ irracionális, ahol a q_i-k nem mind nullák. Lássuk be, hogy bármely $2n - 1$ különböző irracionális számból kiválasztható egy földöntúli n-es.

Megoldás:

Definiáljuk a következő relációt az irracionális számok halmazán: $a \sim b$, ha valamilyen p, $0 < q, r$ racionálisokra $p = qa - rb$. Ez pontosan azt jelenti, hogy a és b ugyanazon irracionális számokat zárja ki a földöntúli n-esből. Láthatjuk, hogy ez a reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív, tehát ekvivalenciareláció.

Az ekvivalenciaosztályokat párokba állíthatjuk a következő képpen: vegyük az osztály egy elemét, majd az ellentettjét, és annak az ekvivalenciaosztályát. Könnyen látható hogy ez egy párosítást ad.

Most osszuk a $2n - 1$ számunkat csoportokba úgy, hogy egy csoportban az összes szám egy ekvivalenciaosztályból legyen, és ha két szám egy ekvivalenciaosztályból van, akkor azok egy csoportban vannak. Csináljunk egy táblázatot, melyben 2 sor és annyi oszlop van, ahány féle osztálypárból származnak a csoportjaink, majd írjuk be a számokat a csoportjuknak megfelelő cellába. Legyen H halmaz üres, ebbe fogjuk válogatni a megfelelő számokat a földöntúli n-esbe.

Lemma 1. Az egy cellában lévő számok kerülhetnek egy földöntúli t-esbe, és ha egy darab közülük egy földöntúli t-esben van, akkor a többit is be lehet írni a földöntúli t-esbe (így egy földöntúli $(t+k-1)$-est létrehozva).

Bizonyítás: Legyenek egy cellában a számok a_i $(i = 1, 2, ..., k)$. Tegyük fel, hogy $(a_1, b_1, b_2, ..., b_{t-1})$ földöntúli t-es. Tegyük fel, hogy $(a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_{t-1})$ nem földöntúli, tehát valamilyen $0 \le \alpha_i$, β_i (nem mind 0) racionálisokra $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{t-1} \beta_i b_i$ racionális. Abból, hogy a_i egy ekvivalenciaosztályból van, következik hogy $a_i = c_i a_1 + p_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$, ahol $0 < c_i$ és p_i racionálisok, tehát az előző feltétel szerint

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(c_i a_1 + p_i) + \sum_{i=1}^{t-1} \beta_i b_i = a_1 \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{t-1} \beta_i b_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i$$

racionális, tehát $(a_1, b_1, b_2, ..., b_{t-1})$ nem földöntúli. Ez ellentmondás, így igazoltuk a lemmánkat. □

Lemma 2. Egy földöntúli t-eshez hozzá lehet venni egy ekvivalenciaosztály-párból valamelyik osztályt.

Bizonyítás: Az előző lemma miatt elég megmutatni, hogy hozzávehető x vagy $-x$ egy földöntúli t-eshez. Tegyük fel hogy nem igaz az állítás. Ekkor valamely $a_1, a_2, .., a_k$-ra a t-esből és valamely $p > 0, \alpha_i \ge 0, q$ (α_i nem mind 0) racionálisokra $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + xp = q$, és valamely $b_1, b_2, ..., b_h$-ra a t-esből (lehetséges $a_i = b_j$) és $r > 0, \beta_i \ge 0, s$ (β_i nem mind 0) racionálisokra $\sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i - xr = s$. Az első egyenletet r-el, a másodikat pedig p-vel szorozva, majd a kettőt összeadva a következőt kapjuk:

$$r \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + p \sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{k} (r\alpha_i) a_i + \sum_{i=1}^{k} (p\beta_i) b_i = qr + sp,$$

Ez azonban ellentmond azzal, hogy az a_i-k és b_i-k egy földönkívüli t-esben vannak. □

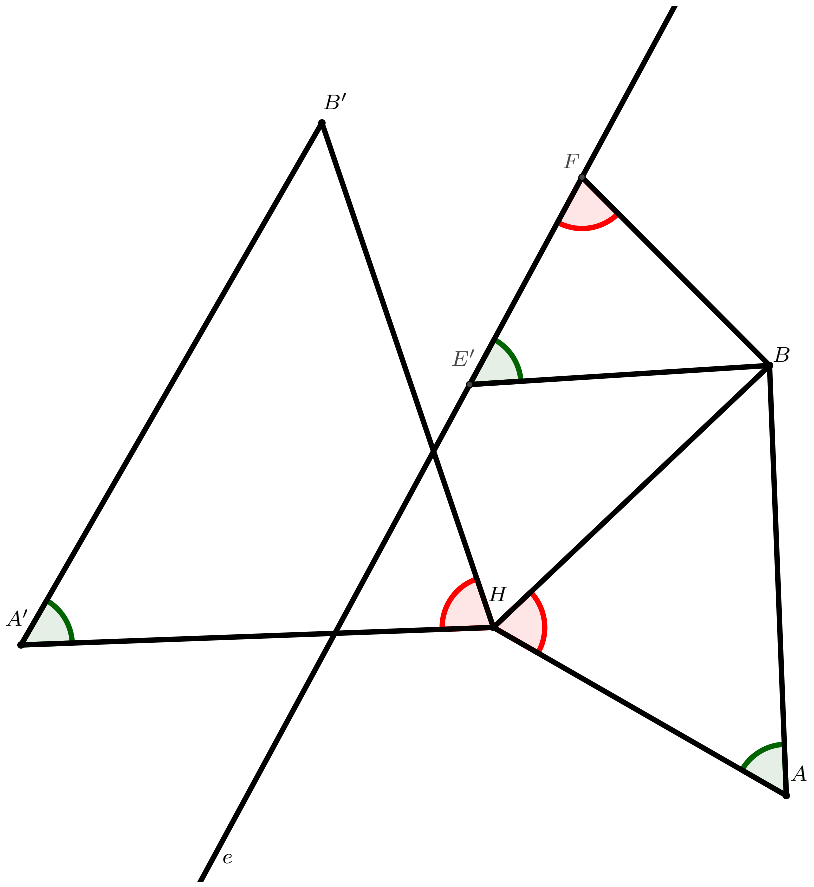
Az első lemma szerint, ha H-hoz hozzáadjuk az első oszlop valamelyik nem üres cellájában lévő számokat, H földöntúli lesz. Ez után a második oszlopból valamely (nem üres) cella elemeit hozzáadhatjuk a 2. Lemma szerint, majd a 3. oszlopból is hozzáadhatjuk valamely nem üres cella elemeit, és így tovább (úgy, hogy közben H földönkívüli marad). Mikor az utolsó oszlopból is hozzáadtuk H-hoz valamely cella elemeit, akkor nézzük meg H elemszámát! Ha legalább n, akkor kész vagyunk. Ha $< n$, akkor azt állítjuk, hogy a ki nem választott számok földönkívüliek. Ezt könnyen bizonyíthatjuk indirekten, hiszen a maradék számok felírhatóak a cellájukkal párban lévő cella egy eleme ellentettjének racionális-szorosa + racionálisként, ami ellentmondást ad arra hogy H földönkívüli. Mivel $|H| + |\overline{H}| = 2n - 1$ és $|H| < n$, így találtunk földönkívüli n-est. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

E+5. Az ABC és $A'B'C'$ hasonló, ellentétes körüljárású háromszögek, melyek magasságpontja megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', CC' egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

1. Megoldás:

A megoldás során irányított szögekkel számolunk. $\sphericalangle(e,f)$-fel jelöljük az e és f egyenesek által bezárt irányított szöget. Először belátunk egy lemmát:

Lemma: Legyenek HAB és $HA'B'$ ellentétes irányítású hasonló háromszögek, és E az AA' és BB' szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja, nevezzük e-nek BB' felezőmerőlegesét. Ekkor $\sphericalangle(BE,e) = \sphericalangle(AB,AH)$.

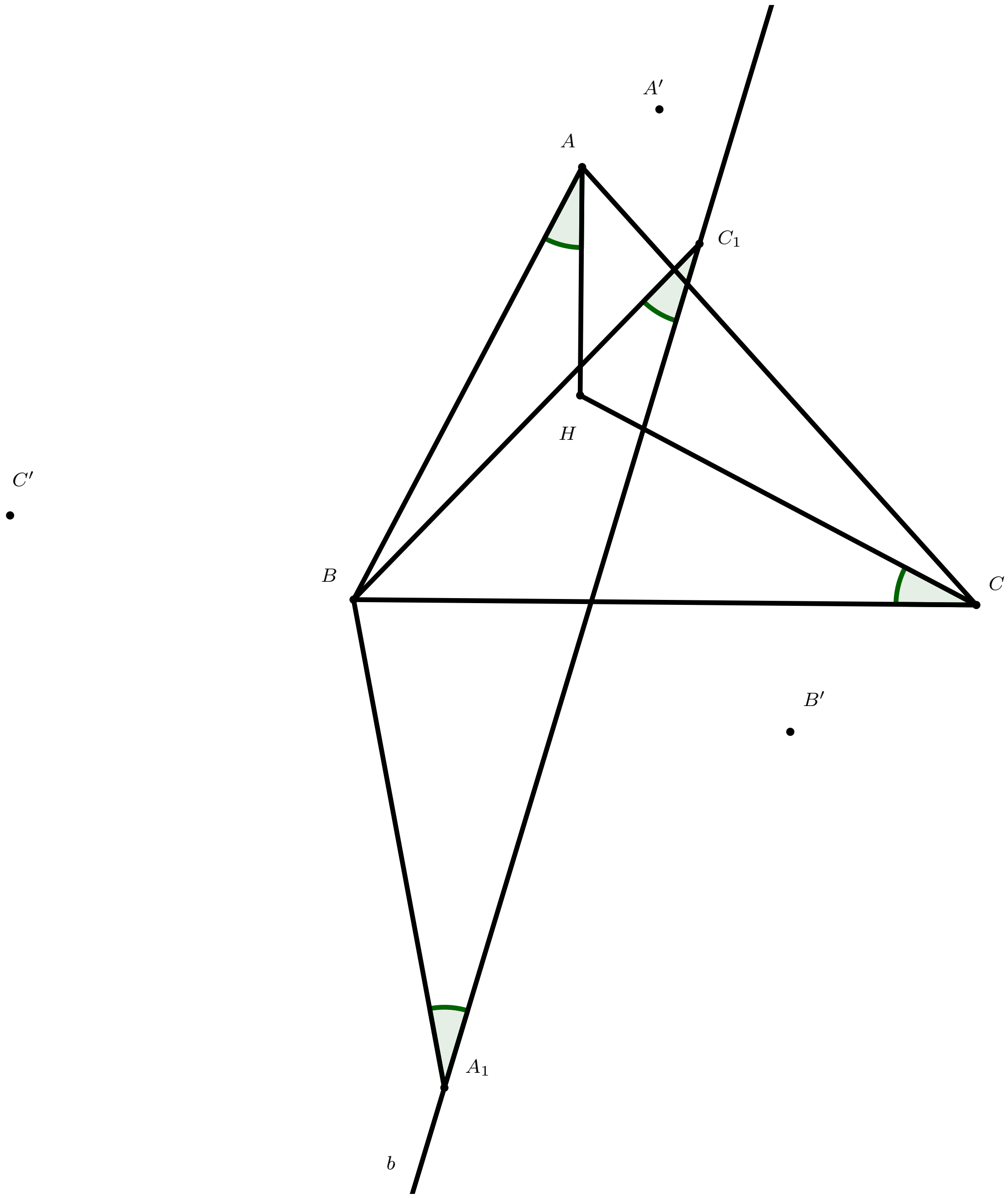


Bizonyítás: Legyen E' az a pont az e egyenesen, melyre $\sphericalangle(BE',e) = \sphericalangle(AB,AH)$. Legyen F az a pont az e egyenesen melyre $\sphericalangle(e,BF) = \sphericalangle(HA,HB)$. Ekkor BFE' háromszög hasonló BHA háromszöghöz. Mivel E' és F az e egyenesen van, ezért BFE' háromszöggel $B'FE'$ egybevágó, mivel az e egyenesre való tükrözés a két háromszöget egymásba viszi. A feltételből HAB-hez hasonló $HA'B'$ így $HA'B'$ hasonló $B'E'F$ háromszöghöz. Van egy B középpontú forgatva nyújtás mely BFE' háromszöget BHA háromszögbe viszi, ennél a forgatva nyújtásnál F pont képe H és E' képe A így BFH háromszög hasonló $BE'A$ háromszöggel. Ugyanígy kapjuk, hogy $B'FH$ háromszög hasonló $B'E'A'$ háromszöghöz. Ezekből a hasonlóságokból kapjuk, hogy

$$\frac{AE'}{HF} = \frac{BE'}{BF} = \frac{B'E'}{B'F} = \frac{A'E'}{HF}$$

így $AE' = A'E'$ tehát E' rajta van AA' felezőmerőlegesén, így $E = E'$, tehát tényleg igaz, hogy $\sphericalangle(BE,e) = \sphericalangle(AB,AH)$, így beláttuk a lemmát. $\square$

Térjünk rá a feladatra:



Legyen AA' felezőmerőlegese az a egyenes, BB' felezőmerőlegese a b egyenes, CC' felezőmerőlegese a c egyenes. Messen a és b C_1-ben, b és c A_1-ben, c és a B_1-ben. HAB és $HA'B'$ ellentétes körüljárású hasonló háromszögek, és AA' és BB' felezőmerőlegesének metszéspontja C_1, a lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $\sphericalangle(BC_1, b) = \sphericalangle(AB, AH)$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\sphericalangle(BA_1, b) = \sphericalangle(CB, CH)$. Tudjuk, hogy $\sphericalangle(AB, AH) = 90^\circ - \beta = \sphericalangle(CH, CB)$ (ahol β a B-nél lévő szög ABC-ben), így $\sphericalangle(AB, AH) = -\sphericalangle(CB, CH)$ tehát $\sphericalangle(BC_1, b) = -\sphericalangle(BA_1, b)$ így BA_1C_1 egyenlőszárú háromszög, tehát $BA_1B'C_1$ rombusz, azaz BB' egyenes az A_1C_1 szakasz felezőmerőlegese. Ugyanígy kapjuk, hogy AA' egyenes a B_1C_1 szakasz felezőmerőlegese és CC' egyenes az A_1B_1 szakasz felezőmerőlegese, tehát AA', BB', CC' egy ponton mennek át, az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontján. Kész.

2. Megoldás:

Vegyünk fel egy komplex számsíkot a síkra: Legyen a közös magasságpont M az origó. A 6 csúcsot jelöljük A,B,C,A',B',C' komplex számokkal, és úgy vesszük fel a komplex síkot (úgy forgatom), hogy egyik csúcs se essen tengelyre. Mivel M magasságpont, és az origó is:

$$B \cdot i \cdot k_1 = A - C$$
$$C \cdot i \cdot k_2 = A - B$$
$$A \cdot i \cdot k_3 = B - C$$

valamilyen k_1, k_2, k_3 valós konstansokra, mert BM merőleges AC-re, CM merőleges AB-re, és AM merőleges BC-re.

Legyen $A = a_1 + a_2 i$, $B = b_1 + b_2 i$, $C = c_1 + c_2 i$. Így átírva az 1. egyenletet:

$$(b_1 + b_2 \cdot i) \cdot i \cdot k_1 = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)i$$
$$(b_1 \cdot i - b_2) \cdot k_1 = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)i$$

A 2 oldalon a valós és képzetes résznek is meg kell egyeznie:

$$-b_2 \cdot k_1 = (a_1 - c_1)$$
$$b_1 \cdot k_1 = (a_2 - c_2)$$

Ebből a 2 egyenletből következik:

$$\frac{-b_2}{b_1} = \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2}$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 c_1 + b_2 c_2$$

(Ha $a_2 - c_2 = 0$ lenne, $k_1 = 0$, emiatt $a_1 - c_1 = 0$, így A és C egybeesne)
A másik 2 egyenletből hasonló levezetésből kapjuk:

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 = b_1 c_1 + b_2 c_2$$
$$c_1 a_1 + c_2 a_2 = c_1 b_1 + c_2 a_2$$

Ezeket összevonva:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 c_1 + b_2 c_2 = c_1 a_1 + c_2 a_2$$

Mivel ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak, és ellentétes forgásirányúak, valamilyen λ komplex számra

$$A' = \lambda \overline{A}$$
$$B' = \lambda \overline{B}$$
$$C' = \lambda \overline{C}$$

mert egy M-en átmenő egyenesre való tükrözéssel majd egy M körüli forgatva nyújtással ABC-ből megkapható $A'B'C'$.

AA', BB', CC' pontosan akkor mennek át egy ponton, ha létezik olyan μ_1, μ_2, μ_3 valós számhármas, amire

$$\mu_1 \cdot A' + (1-\mu_1)A = \mu_2 \cdot B' + (1-\mu_2)B = \mu_3 \cdot C' + (1-\mu_3)C$$

vagyis

$$\mu_1 \cdot \lambda \cdot \overline{A} + (1-\mu_1)A = \mu_2 \cdot \lambda \cdot \overline{B} + (1-\mu_2)B = \mu_3 \cdot \lambda \cdot \overline{C} + (1-\mu_3)C$$

Először megoldjuk az első egyenletet μ_1, μ_2-re: (Feltesszük, hogy $\lambda \neq 1, -1$)
A 2 oldal komplex és valós részének is meg kell egyeznie, így 2 egyenlet adódik (az eddigi jelölésekkel):

$$\mu_1 \cdot \lambda \cdot a_1 + (1-\mu_1)a_1 = \mu_2 \cdot \lambda \cdot b_1 + (1-\mu_2)b_1$$

$$-\mu_1 \cdot \lambda \cdot a_2 + (1-\mu_1)a_2 = -\mu_2 \cdot \lambda \cdot b_2 + (1-\mu_2)b_2$$

Az 1. egyenletből kifejezve μ_1-et:

$$\mu_1(a_1\lambda - a_1) = \mu_2(b_1\lambda - b_1) + b_1 - a_1$$

$$\mu_1 = \frac{\mu_2(b_1\lambda - b_1) + b_1 - a_1}{(a_1\lambda - a_1)}$$

A 2. egyenlet rendezve:

$$\mu_1(a_2\lambda + a_2) - a_2 = \mu_2(b_2\lambda + b_2) - b_2$$

Behelyettesítve μ_1 helyére:

$$\frac{\mu_2(b_1\lambda - b_1) + b_1 - a_1}{(a_1\lambda - a_1)}(a_2\lambda + a_2) + (b_2 - a_2) = \mu_2(b_2\lambda + b_2)$$

$$(\mu_2(b_1\lambda - b_1) + b_1 - a_1)(a_2\lambda + a_2) + (b_2 - a_2)(a_1\lambda - a_1) = \mu_2(b_2\lambda + b_2)(a_1\lambda - a_1)$$

$$\mu_2((b_1\lambda - b_1)(a_2\lambda + a_2) - (b_2\lambda + b_2)(a_1\lambda - a_1)) = (a_2 - b_2)(a_1\lambda - a_1) + (a_1 - b_1)(a_2\lambda + a_2)$$

$$\mu_2 = \frac{(a_2 - b_2)(a_1\lambda - a_1) + (a_1 - b_1)(a_2\lambda + a_2)}{((b_1\lambda - b_1)(a_2\lambda + a_2) - (b_2\lambda + b_2)(a_1\lambda - a_1))} = \frac{(a_2 - b_2)a_1(\lambda - 1) + (a_1 - b_1)a_2(\lambda + 1)}{b_1(\lambda - 1)a_2(\lambda + 1) - b_2(\lambda + 1)a_1(\lambda - 1)} =$$

$$= \frac{(\lambda - 1)a_1(a_2 - b_2) + (\lambda + 1)a_2(a_1 - b_1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Az eredeti (3 tagú) egyenletnek akkor van megoldása, ha egy adott μ_1, μ_2, μ_3 számhármasra teljesül mindhárom egyenlőség (vagy 2, mert ezekből már következik a 3.). Ha az 1.-2. és a 2.-3. tag közötti egyenetnek ugyanaz a μ_2 a megoldása, akkor szimmetria miatt az egyenletrendszernek van egy egyértelmű megoldása, van közös metszéspont. Ehhez tehát az kell, hogy a két kapott μ_2 egyenlő legyen:
A

$$\mu_2 \cdot \lambda \cdot \overline{B} + (1-\mu_2)B = \mu_3 \cdot \lambda \cdot \overline{C} + (1-\mu_3)C$$

egyenlet megoldása μ_2-re (az előző egyenlettel való a-c szimmetria miatt):

$$\mu_2 = \frac{(\lambda-1)c_1(c_2-b_2)+(\lambda+1)c_2(c_1-b_1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)(c_2b_1-c_1b_2)}$$

Tehát akkor van közös metszéspont, ha

$$\frac{(\lambda-1)a_1(a_2-b_2)+(\lambda+1)a_2(a_1-b_1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)(a_2b_1-a_1b_2)} = \frac{(\lambda-1)c_1(c_2-b_2)+(\lambda+1)c_2(c_1-b_1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)(c_2b_1-c_1b_2)}$$

$$(\lambda-1)a_1(a_2-b_2)(c_2b_1-c_1b_2)+(\lambda+1)a_2(a_1-b_1)(c_2b_1-c_1b_2) =$$
$$= (\lambda-1)c_1(c_2-b_2)(a_2b_1-a_1b_2)+(\lambda+1)c_2(c_1-b_1)(a_2b_1-a_1b_2)$$

$$a_1b_1[(\lambda-1)a_2c_2-(\lambda-1)b_2c_2+(\lambda+1)a_2c_2-(\lambda+1)b_2c_2]+$$
$$+b_1c_1[(\lambda+1)a_2b_2-(\lambda-1)a_2c_2+(\lambda-1)b_2a_2-(\lambda+1)a_2c_2]+$$
$$+c_1a_1[-(\lambda-1)a_2b_2+(\lambda-1)b_2^2-(\lambda+1)a_2b_2+(\lambda-1)b_2c_2-(\lambda-1)b_2^2+(\lambda+1)b_2c_2]+$$
$$+b_1^2(-(\lambda+1)a_2c_2+(\lambda+1)a_2c_2)=0$$

$$a_1b_1[(\lambda+1)(a_2c_2-b_2c_2)]+b_1c_1[(\lambda+1)(a_2b_2-a_2c_2)]++c_1a_1[(\lambda+1)(b_2c_2-a_2b_2)]+$$
$$+(\lambda-1)(a_1a_2b_1c_2-a_1b_1b_2c_2-a_2b_1c_1c_2+a_2b_1b_2c_1-a_1a_2b_2c_1+a_1b_2^2c_1+a_1b_2c_1c_2-a_1b_2^2c_1)=0$$

$$a_1b_1[(\lambda+1)(a_2c_2-b_2c_2)]+b_1c_1[(\lambda+1)(a_2b_2-a_2c_2)]++c_1a_1[(\lambda+1)(b_2c_2-a_2b_2)]+$$
$$+(\lambda-1)(a_1c_1(b_2c_2-a_2b_2)+a_1b_1(a_2c_2-b_2b_2)+b_1c_1(a_2b_2-a_2c_2))=0$$

(A merőlegességből jövő feltételekből)

$$2\lambda((a_1c_1(b_2c_2-a_2b_2)+a_1b_1(a_2c_2-b_2c_2)+b_1c_1(a_2b_2-a_2c_2)))=0$$
$$2\lambda((a_1c_1(-b_1c_1+a_1b_1)+a_1b_1(-a_1c_1+b_1c_1)+b_1c_1(-a_1b_1+a_1c_1)))=0$$
$$2\lambda[a_1b_1c_1(a_1(1-1)+b_1(1-1)+c_1(-1+1))]=0$$
$$2\lambda a_1b_1c_1(0)=0$$

Ez teljesül, ezért a 3 egyenes 1 ponton megy át.

Ekvivalens átalkításokat végeztünk: Ha $a_1b_2-a_2b_1=0$ lenne, akkor M, A, B egy egyenesre esne ($\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$), ez egy háromszögnél nem fordulhat elő.

Hasonlóan $a_1c_2-a_2c_1 \neq 0 \neq c_1b_2-c_2b_1$.

Ha $\lambda=1$, mindhárom egyenes függőleges lesz (P' és P valós része megegyezik), párhuzamosak, ha $\lambda=-1$, akkor mindhárom egyenes vízszintes, párhuzamosak (P' és P képzetes része megegyezik).