Döntő: 2019. február 1-3.

Matematika megoldások

XII. Dürer Verseny

CD kategória

C1. Hilda egy kisbolygót, egy űrsiklót és egy űrkutyát akart vásárolni a licitboltban. Sajnos azonban ilyet nem tartanak, ezért el kellett mennie az űrpiacra. Szilvitől, aki egy kisbolygót, három űrsiklót és öt űrkutyát vett, azt hallotta, hogy összesen 200 dürerdollárt fizetett. Luca azt mesélte, hogy 225 dürerdollárért tudott egy kisbolygót, négy űrsiklót és hét űrkutyát megvenni. Mennyi dürerdollárt vigyen magával Hilda, ha pontosan akar fizetni?

Megoldás: Legyen egy kisbolygó ára a, egy űrsiklóé b és egy űrkutyáé pedig c dürerdollár. Ekkor Szilvitől azt az információt kapjuk, hogy $a + 3b + 5c = 200$, Luca szerint $a + 4b + 7c = 225$. Hilda az $a + b + c$ értéket szeretné megtalálni. Ehhez képezzük a két egyenlet különbségét, azt kapjuk, hogy $b + 2c = 25$. Vegyük észre, hogy Luca éppen $a + b + c + 2b + 4c$ dürerdollárt fizetett. A fentiek szerint $2b + 4c = 50$, tehát Hildának $200 - 50 = 150$ dürerdollárt kell magával vinnie.

C2. Egy partin 12 színész, egy újságíró, illetve Balogh úr vesz részt. Az újságíró tudja, hogy Balogh úr minden színészt ismer, viszont egyik színész sem ismeri Balogh urat. A színészek közötti ismeretségekről semmit nem tud, és azt sem tudja, melyik ember Balogh úr. Ezt szeretné kitalálni. Ehhez odamehet egy tetszőleges vendéghez, és egy tetszőleges másik vendégről megkérdezheti, hogy ismeri-e őt. Mutassuk meg, hogy van olyan stratégia, amellyel 12 ilyen kérdés után az újságíró biztosan tudja, kicsoda Balogh úr.

Megoldás: Nézzük meg, mit tud meg az újságíró egy válaszból! Tegyük fel, hogy odamegy az X emberhez és megkérdezi tőle, hogy ismeri-e Y-t. Ha X azt válaszolja, hogy ismeri Y-t, akkor ebből az újságíró megtudja, hogy Y nem lehet Balogh úr. Hiszen ha Y Balogh úr lenne, akkor X színész lenne, márpedig Balogh urat egy színész sem ismeri. Ha viszont X azt válaszolja, hogy nem ismeri Y-t, akkor ebből az újságíró megtudja, hogy X nem Balogh úr. Ha ugyanis X Balogh úr lenne, akkor Y színész lenne, márpedig Balogh úr minden színészt ismer. Tehát az újságíró minden kérdés után megtudja a kérdésben érintett két ember valamelyikéről, hogy az illető nem Balogh úr.

Most, hogy ezt meggondoltuk, az újságíró követheti például a következő stratégiát: A 13 ember közül odamegy valakihez, és megkérdezi egy tetszőleges másik emberről, hogy őt ismeri-e. A válasz hallatán a két ember közül az egyikről megtudja, hogy ő nem Balogh úr. Így már csak 12 potenciális jelölt van Balogh úrra. Most ebből a maradék 12 emberből megy oda valakihez, és a maradék $12 - 1$ ember közül valakiről megkérdezi, hogy őt ismeri-e. A válasz alapján a 12 ember valamelyikéről is megtudja hogy ő nem Balogh úr. Tehát így már csak 11 jelölt van Balogh úrra. Így tovább folytatva, ha épp k jelölt van Balogh úrra, akkor ebből a k emberből kell valakihez odamenni, és a maradék $k - 1$ emberből valakiről megkérdezni, hogy őt ismeri-e. A válasz után már csak $k - 1$ lehetséges jelölt lesz Balogh úrra. Így folyatatva minden kérdés után 1-gyel csökken a lehetséges jelöltek száma, így 12 kérdés után már csak 1 lehetséges jelölt lesz Balogh úrra, tehát 12 kérdés után az újságíró már biztosan tudja, hogy az az ember Balogh úr.

C3. **a)** Ki lehet-e tölteni egy 4×4-es táblázatot számjegyekkel úgy, hogy balról jobbra olvasva csupa páros, felülről lefelé pedig csupa páratlan négyjegyű számot lássunk?
b) Ki lehet-e tölteni egy 4×4-es táblázatot számjegyekkel úgy, hogy balról jobbra olvasva csupa hárommal osztható, felülről lefelé pedig csupa hárommal osztva 1 maradékot adó négyjegyű számot lássunk?
c) Ki lehet-e tölteni egy 4×4-es táblázatot az 1 és 2 számjegyekkel úgy, hogy balról jobbra illetve fentről lefelé olvasva a nyolc darab négyjegyű szám mind különböző maradékot adjon nyolccal osztva?

Megoldás: a) Nem lehet kitölteni, a jobb alsó mezőben ugyanis páros számjegynek kellene állnia, mert a negyedik sorban egy páros négyjegyű szám van. Az oszlopokra vonatkozó szabály miatt azonban páratlan számjegynek kellene lennie ebben a mezőben. A két feltétel egyszerre nem teljseülhet.
b) Nem lehet kitölteni. A hármas oszthatóság szabálya szerint egy szám számjegyeinek összegének hármas osztási maradéka megegyezik a szám osztási maradékával. A számjegyeket soronként összeadva csupa hárommal osztható számot kapunk, így az összes mezőbe írt számjegyek összege is hárommal osztható. Oszloponkénti összeadásnál négy hárommal osztva egy maradékot adó számot kapunk. Ezeket összeadva ismét hárommal osztva egy maradékot adó számot kapunk, ez az összes mezőkben szereplő számok összege. A két feltétel egyszerre nem teljesülhet.
c) Létezik ilyen kitöltés, például:

1	2	1	1
2	1	1	1
2	2	1	2
2	2	2	1

C4. Egy társasjáték olyan kártyákból áll, amelyeken képecskék vannak. Mindegyik kártyán ugyanannyi képecske van, egy kártyán nincsen két egyforma, és tudjuk azt is, hogy bármely két kártyán pontosan egy azonos képecske található.
a) Legalább hányféle képecske fordul elő a társasjátékban, ha hét kártyánk van és minden kártyán hat képecske van?
b) Legalább hányféle képecske fordul elő a társasjátékban, ha száz kártyánk van és minden kártyán kilencvenkilenc képecske van?

Megoldás: A feladatot általánosan $n+1$ kártyára és n képre fogjuk belátni, így az **a)** és **b)** feladatrészekre is meg lesz a megoldás.

Teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani, hogy $n+1$ kártya esetén legalább $\frac{n(n+1)}{2}$ különböző képecskére lesz szükségünk.

Az $n=1$ esetben ezt könnyű látni, hiszen két kártyánk van és mind a kettőre ugyanazt a képet rakjuk.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás.

Vegyünk most $n+1$ kártyát, és számozzuk meg őket 1-től $n+1$-ig. Tegyük egy időre félre az $n+1$-es kártyát és vizsgáljuk meg a maradék n kártyát. Bármelyik kártyát nézzük ezek közül, a kártyán legfeljebb $n-1$ olyan kép lesz, amely másik kártyán is rajta van, így megtehetjük, hogy minden kártyán letakarunk egy képet, és továbbra is igaz marad, hogy minden két kártyán pontosan egy azonos kép van és egy kártyán nincs két egyforma kép.

Ekkor felhasználhatjuk az indukciós feltevésünket, hiszen a letakarások után az n kártya esetén fennállnak a megfelelő feltételeink. Vagyis ezen az n kártyán a nem letakart képek között minimum $\frac{n(n-1)}{2}$ különböző kép előfordul.

Most tegyük vissza a félretett $n+1$-es kártyát, és vizsgáljuk az eddig letakart képeket is. Ha egy kép eddig le volt takarva, akkor biztos, hogy különbözik minden le nem takart képtől, hiszen egyébként vagy lenne egy kártyán két azonos kép, vagy pedig két kártyán két különböző azonos kép is lenne.

Tehát a korábban letakart n kép különbözik a le nem takart képektől, így legalább

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

kép van a kártyákon összesen.

Ez el is érhető. Vizsgáljuk a következő konstrukciót: minden kártyapárhoz vegyünk egy képet, és azt a képet pontosan erre a két kártyára tegyük rá. Minden kártyapárhoz különböző képet vegyünk, így egy kártyán nem lesz két egyforma kép, és két kártyán pontosan egy azonos kép lesz. Ehhez annyi képre van szükségünk, mint ahány kártyapár van, tehát $n+1$ kártya esetén $\frac{n(n+1)}{2}$ különböző képet használunk fel.

Tehát az **a)** feladatrészben 21 különböző képre, a **b)** feladatrészben pedig 4950 különböző képre van szükségünk.

C5. Az A, B, C és D négy különböző pont, melyek úgy helyezkednek el, hogy ABC és CBD is szabályos háromszög. Keressetek minél több olyan körvonalat, amely ettől a négy ponttól egyenlő távolságra halad el. Hogyan lehet megszerkeszteni ezeket a körvonalakat?
Megjegyzés: Egy P pont és egy k körvonal távolságát a következő módon mérjük: összekötjük P-t a kör középpontjával és megmérjük, hogy ezen az egyenesen mennyit kell haladnunk a körvonalig. A kör belső pontjai esetén a rövidebb ilyen szakasz hossza ez a távolság. A kör középpontjának távolsága a körtől a kör sugara.

Megoldás:

Legyen $AB = AC = BC = CD = BD = 1$, ekkor $AD = \sqrt{3}$

Legyen ABC szabályos háromszög középpontja X, BCD-é Y.

Ekkor $AX = BX = CX = BY = CY = DY = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Legyen O BC felezőpontja.

Mivel olyan kör nincs, amely mind a 4 ponton átmegy, minden keresett körre igaz, hogy A, B, C, D vagy a körvonalon belül, vagy kívül van.

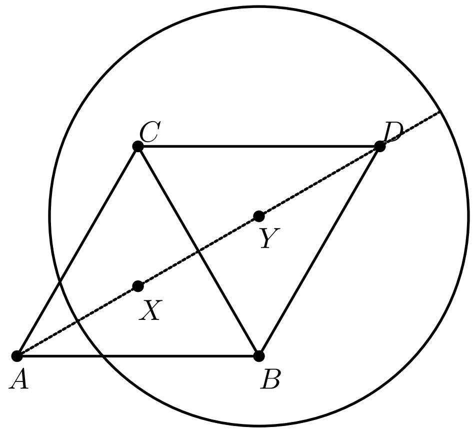
Ha mind a 4 pont a körön belül lenne, akkor egyenlő távolságra lennének a kör középpontjától, ekkor ennek rajta kellene lenni AB, BD, DC és CA felezőmerőlegesén is, viszont ezeknek az egyeneseknek nincs közös pontja, így ebben az esetben nincs ilyen kör.

Ha 3 pont van a körön belül és 1 körön kívül: Ha A van körön kívül: Ekkor Y kell, hogy legyen a kör középpontja, legyen r a kör sugara, ekkor igaz, hogy

$$r - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - r \tag{1}$$

vagyis $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ekkor 1 ilyen kör van.

Szerkesztése: Vegyük fel AX felezőpontját: F. Az ezen keresztülmenő, Y középpontú kör mindegyik ponttól $AF = FX$ távolságra van, mivel $YX = YC = YB = YD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Hasonlóan 1 ilyen kör van, amikor B, C, A vannak belül, és D kívül.

Ha B van kívül, A, C, és D belül: Ekkor a kör középpontjának AC és CD metszéspontjának kell lennie, ami viszont B, így B nem lehet a körön kívül, tehát ebben az esetben nincs ilyen kör.

Hasonlóan nincs ilyen kör, ha C van kívül, A, B, és D belül.

Ha 2 pont van a körön kívül, és 2 a körön belül:

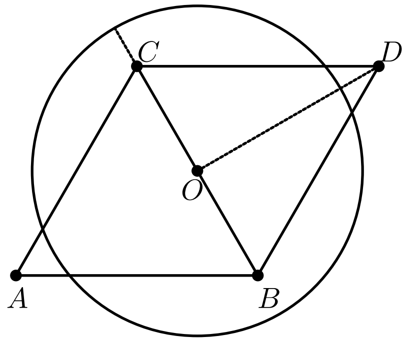
Ha B és C van a körön kívül, A és D a körön belül: Legyen K a kör középponja, ekkor $KC = KB$, $KA = KD$, K rajta van BC és AD felezőmerőlegesén is, vagyis a kör középpontja O, ettől B és C 0,5 távolságra van, A és D pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$-re, így nem létezhet ilyen kör.

Ha A és D van a körön kívül, B és C a körön belül: előző esethez hasonlóan O a kör középpontja, a kör sugarára pedig igaz:

$$r - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - r \tag{2}$$

vagyis $r = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, így ebben az esetben 1 ilyen kör van.

Szerkesztése: Felveszem az O középpontú, C-n átmenő kört. Ez elmetszi AD-t M_1, M_2 pontban (A-hoz M_1 van közelebb). Felveszem AM_1 felezőpontját: G, felveszem az O középpontú, G-n átmenő kört, ez mind a 4 ponttól $GA = GM_1$ távolságra lesz.



Ha a négyszögben 2 szomszédos pont van a körön belül, 2 a körön kívül: legyen A, B kívül, C, D belül. Ekkor a kör középpontjának rajta kell lennie AB és CD felezőmerőlegesén is, viszont ezek párhuzamosak, és nem esnek egybe, így ekkor nem létezik ilyen kör.

Ha 3 pont van a körön kívül, 1 belül:

Ha A van belül, B, C, D kívül:

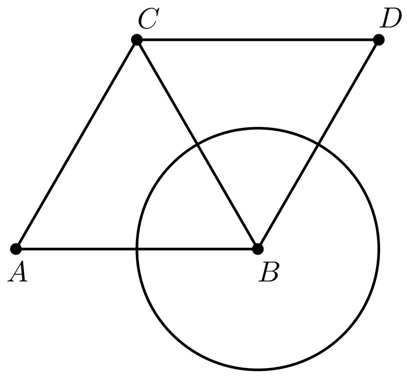
Ekkor a kör középpontjától B, C, D egyenlő távolságra vannak, tehát a kör középpontja csak Y lehet, viszont ehhez közelebb van B, C, D, mint A, így ekkor nem létezhet ilyen kör.

Hasonlóan nem létezik ilyen kör, ha D van belül, B, C, A kívül.

Ha B van belül, A, C, D kívül: a kör középpontja rajta van AC és CD felezőmerőlegesén, vagyis B pontban kell, hogy legyen. Ekkor a kör sugarára igaz:

$$r = 1 - r \tag{3}$$

vagyis $r = \frac{1}{2}$. Tehát ebben az esetben 1 ilyen kör van. Szerkesztése: Felveszem BC felezőpontját, ezen keresztül B középpontú kör minden ponttól $\frac{1}{2}$ távolságra lesz.



Ha C van belül, A, B, D kívül, hasonlóan 1 ilyen kör van.

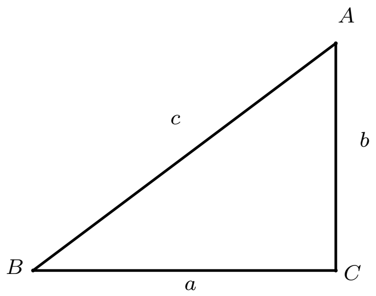
Ha mind a 4 pont a körön kívül van: ekkor az 1. esethez hasonlóan a kör középpontjának mind a 4 ponttól azonos távolságra kéne lennie, de ilyen pont nem létezik, így ebben az esetben nincs ilyen kör.

Ezzel az összes lehetséges eset le lett fedve, tehát összesen 6 ilyen kör van.

C6. **Játék: lásd a D kategória megoldásainál.**

D1. Buta Balambér sétája során útelágazáshoz érkezett, s noha tudta, hogy bármerre is indul, ugyanoda fog érkezni, el kellett döntenie, merre is menjen. A bal oldali út – bár egyenes volt – olyan hosszúnak tűnt, hogy Balambér gondolkodás nélkül a jobb oldalit választotta. Ez merőlegesen indult a bal oldali útra, és két egyenes szakaszból állt, melyek hossza mérföldben mérve egész számok. Így, hogy a jobb oldali út mellett döntött, éppen 99 mérföldet sétált. Hány mérföldet kellett volna sétálnia, ha a bal oldalit választja, melyről szintén tudjuk, hogy a hossza mérföldben mérve egész szám?

Megoldás: Készítsünk ábrát az utak elhelyezkedéséről!



A kereszteződés a C csúcsnál található, Balambér a b és c oldalak mentén haladva ér el B-be. Tudjuk, hogy az ABC háromszögnek C-nél derékszöge van, valamint, hogy $b + c = 99$ (mérföldekben mérve). Felírva az ABC háromszög oldalaira a Pitagorasz-tételt, majd felhasználva az ismert azonosságot:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = 99 \cdot (c - b).$$

Mivel az egyenlőség jobb oldala osztható 3-mal, így $3 \mid a$, legyen $a = 3 \cdot k$ valamely k egészre. Ekkor:

$$9k^2 = 99 \cdot (c - b),$$

$$k^2 = 11 \cdot (c - b).$$

Vagyis 11, legyen $k = 11 \cdot m$ alkalmas m egészre. Így:

$$121 \cdot m^2 = 11 \cdot (c - b),$$

$$11 \cdot m^2 = (c - b).$$

Mivel $b, c > 0$, így $c - b < c + b = 99$, tehát $c - b$-nek két lehetséges értéke van, 11 és 44.

1. eset: ha $c - b = 11$. Ekkor $2c = c - b + c + b = 11 + 99$, vagyis $c = 55$, $b = 44$, $m = 1$, így $a = 33 \cdot m = 33$.

2. eset: ha $c - b = 44$. Ekkor $2c = 44 + 99 = 143$, azonban ez ellentmondás, hiszen minden útszakasz hossza mérföldben mérve egész szám.

Tehát Balambérnak 33 mérföldet kellett volna csak sétálnia, ha a bal oldali utat választja.

D2. Egy társasjáték olyan kártyákból áll, amelyeken képecskék vannak. Mindegyik kártyán ugyanannyi képecske van, egy kártyán nincsen két egyforma, és tudjuk azt is, hogy bármely két kártyán pontosan egy azonos képecske található.
a) Legalább hányféle képecske fordul elő a társasjátékban, ha hét kártyánk van és minden kártyán hat képecske van?
b) Legalább hányféle képecske fordul elő a társasjátékban, ha száz kártyánk van és minden kártyán kilencvenkilenc képecske van?

Megoldás: A feladatot általánosan $n + 1$ kártyára és n képre fogjuk belátni, így az **a)** és **b)** feladatrészekre is meg lesz a megoldás.

Teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani, hogy $n+1$ kártya esetén legalább $\frac{n(n+1)}{2}$ különböző képecskére lesz szükségünk.

Az $n = 1$ esetben ezt könnyű látni, hiszen két kártyánk van és mind a kettőre ugyanazt a képet rakjuk.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás.

Vegyünk most $n+1$ kártyát, és számozzuk meg őket 1-től $n+1$-ig. Tegyük egy időre félre az $n+1$-es kártyát és vizsgáljuk meg a maradék n kártyát. Bármelyik kártyát nézzük ezek közül, a kártyán legfeljebb $n-1$ olyan kép lesz, amely másik kártyán is rajta van, így megtehetjük, hogy minden kártyán letakarunk egy képet, és továbbra is igaz marad, hogy minden két kártyán pontosan egy azonos kép van és egy kártyán nincs két egyforma kép.

Ekkor felhasználhatjuk az indukciós feltevésünket, hiszen a letakarások után az n kártya esetén fennállnak a megfelelő feltételeink. Vagyis ezen az n kártyán a nem letakart képek között minimum $\frac{n(n-1)}{2}$ különböző kép előfordul.

Most tegyük vissza a félretett $n+1$-es kártyát, és vizsgáljuk az eddig letakart képeket is. Ha egy kép eddig le volt takarva, akkor biztos, hogy különbözik minden le nem takart képtől, hiszen egyébként vagy lenne egy kártyán két azonos kép, vagy pedig két kártyán két különböző azonos kép is lenne.

Tehát a korábban letakart n kép különbözik a le nem takart képektől, így legalább

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

kép van a kártyákon összesen.

Ez el is érhető. Vizsgáljuk a következő konstrukciót: minden kártyapárhoz vegyünk egy képet, és azt a képet pontosan erre a két kártyára tegyük rá. Minden kártyapárhoz különböző képet vegyünk, így egy kártyán nem lesz két egyforma kép, és két kártyán pontosan egy azonos kép lesz. Ehhez annyi képre van szükségünk, mint ahány kártyapár van, tehát $n+1$ kártya esetén $\frac{n(n+1)}{2}$ különböző képet használunk fel.

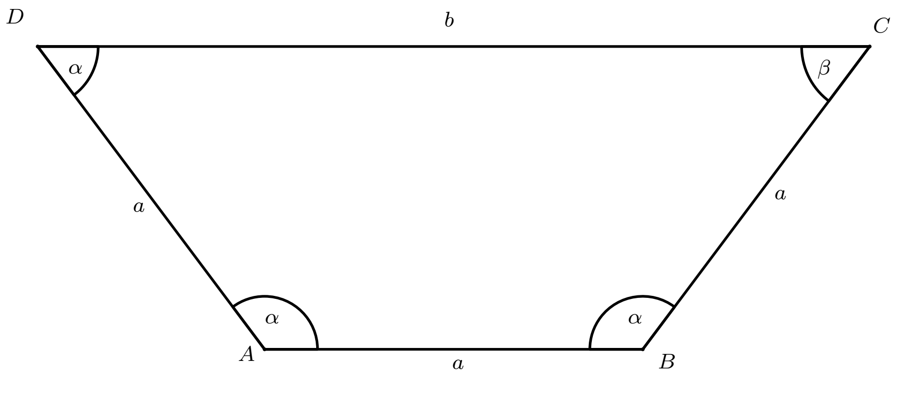
Tehát az **a)** feladatrészben 21 különböző képre, a **b)** feladatrészben pedig 4950 különböző képre van szükségünk.

D3. **a)** Létezik-e olyan négyszög, amelyre egyszerre teljesül, hogy három oldala egyenlő hosszú, de a negyedik különböző, és három szöge egyenlő, de a negyedik különböző?

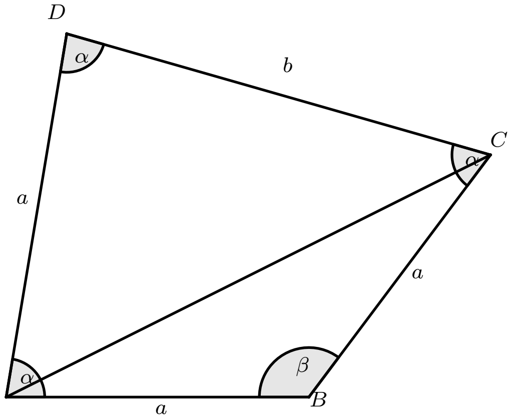
b) Létezik-e olyan ötszög, amelyre egyszerre teljesül, hogy négy oldala egyenlő hosszú, de az ötödik különböző, és négy szöge egyenlő, de az ötödik különböző?

Megoldás: a) Nem létezik ilyen négyszög. Legyenek a négyszög oldalai a, a, a és b, a szögei pedig α, α, α és β, ahol $a \neq b$ és $\alpha \neq \beta$. Két olyan szög van, amelyet két egyforma oldal zár be, ezek alapján két esetre bontjuk a feladat megoldását.

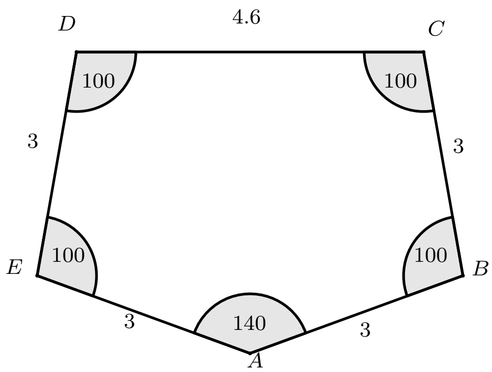
1. eset: ha mindkét szög α. Ekkor a szimmetria miatt a négyszög trapéz, ekkor pedig $\alpha=\beta$, így ellentmondásra jutottunk.



2.eset: ha az egyik szög α, a másik pedig β. Ekkor az AC átló behúzásával látszik, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú, vagyis $CAB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, ami $DAB\sphericalangle = BCD\sphericalangle$ miatt azt jelenti, hogy $CAD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$, vagyis a CDA háromszög is egyenlőszárú, azaz $a=b$, ami szintén ellentmondás.



b) Ilyen ötszög létezik, például a következő:



D4. **a)** Ki lehet-e színezni a pozitív racionális számokat pirossal és kékkel úgy, hogy piros és kék szám is keletkezzen, és bármely két azonos színű szám összege is velük egyszínű legyen?
b) Ki lehet-e színezni a pozitív racionális számokat pirossal és kékkel úgy, hogy piros és kék szám is keletkezzen, és bármely két azonos színű szám szorzata is velük egyszínű legyen?

Megoldás:

a) Nem lehet, és ezt indirekten bizonyítjuk. Ekkor egy tetszőleges racionális szám egész számszorosai mind ugyanolyan színűek. Ezt indukcióval látjuk be (feltehetjük, hogy x (a számunk) kék).

$n = 1$-re $nx = x$ kék. Tegyük fel, hogy egy adott n-re igaz. Ekkor $n+1$-re: $(n+1)x = nx+x$, tehát $(n+1)x$ két kék szám összege, így az is kék.

Mivel van kék és piros számunk is, legyen $\frac{p}{q}$ kék, és $\frac{r}{s}$ piros ($p,\ q,\ r,\ s$ pozitív egészek). Ekkor pr az $\frac{p}{q}$-nak és $\frac{r}{s}$-nek is egész számszorosa, tehát egyszerre kék és piros. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így bebizonyítottunk hogy nem lehet a pozitív racionálisokat így kiszínezni.

b) Van megfelelő színezés, többet is fogunk mutatni.

Az első példánk az, hogy az 1-nél kisebb számok legyenek pirosak, a nála nagyobbak kékek, az 1 pedig legyen szintén piros. Ekkor nyilván azonos színű számok szorzata ugyanolyan színű lesz, és minden racionális számot kiszíneztünk.

A második példánk a következő: legyen a 2 kitevője egy racionális számban az az egész szám, amely a 2 kitevője a szám számlálójában mínusz a 2 kitevője a szám nevezőjében. Ez egyértelmű a racionális szám bármely tört alakban való felírására. Legyenek azok a számok pirosak, amelyekben a 2 kitevője ≤ 0, és legyenek azok a kékek, amelyekben a 2 kitevője pozitív. Ekkor a pirosak szorzata piros lesz, a kékeké pedig kék, tehát ez is egy megfelelő színezés.

D5. **a)** Tekintsük a pozitív egész számokat 1-től 16-ig. Mutassátok meg, hogy tudunk belőlük 8 törtet képezni úgy, hogy minden számot pontosan egyszer használunk, és a kapott 8 tört összege egész szám.
b) Tekintsük a pozitív egész számokat 1-től 64-ig. Mutassátok meg, hogy tudunk belőlük 32 törtet képezni úgy, hogy minden számot pontosan egyszer használunk, és a kapott 32 tört összege egész szám.
Megjegyzés: például 1*-től* 6*-ig el lehet osztani a számokat megfelelő módon a következőképpen:* $5/1 + 3/2 + 6/4 = 8$.

Megoldás:
a) A feladatunk, hogy mutassunk 8 olyan törtet, melyek összege egész. Ezt a legkönnyebben úgy tehetjük meg, hogy a törteket párokba rendezzük, melyek összege egész. Minden ilyen párt egy $\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$ és egy $\frac{\text{páros}}{\text{páros}}$ törtből fogunk megalkotni, melyek közül az előbbi $\frac{8+n}{n}$, míg a párja $\frac{m}{2n}$ alakú. Egy ilyen párosítás:

$$\left(\frac{15}{7}+\frac{12}{14}\right)+\left(\frac{13}{5}+\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{11}{3}+\frac{8}{6}\right)+\left(\frac{9}{1}+\frac{16}{2}\right)=3+3+5+17,$$

amiről látszik, hogy egész.
b) Az előző rész gondolatmenetét alkalmazva a következő törtpárok megfelelők lesznek:

$$\left(\frac{63}{31}+\frac{60}{62}\right);\left(\frac{61}{29}+\frac{52}{58}\right);\left(\frac{59}{27}+\frac{44}{54}\right);\left(\frac{57}{25}+\frac{36}{50}\right);\left(\frac{55}{23}+\frac{28}{46}\right);\left(\frac{53}{21}+\frac{20}{42}\right);\left(\frac{51}{19}+\frac{12}{38}\right);\left(\frac{49}{17}+\frac{4}{34}\right);$$

$$\left(\frac{47}{15}+\frac{56}{30}\right);\left(\frac{45}{13}+\frac{40}{26}\right);\left(\frac{43}{11}+\frac{24}{22}\right);\left(\frac{41}{9}+\frac{8}{18}\right);\left(\frac{39}{7}+\frac{48}{14}\right);\left(\frac{37}{5}+\frac{16}{10}\right);\left(\frac{35}{3}+\frac{32}{6}\right);\left(\frac{33}{1}+\frac{64}{2}\right)$$

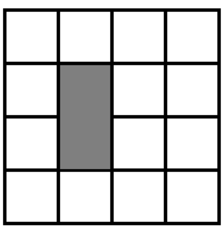
Itt minden párnak az összege egész, így az összegük is az.

D6. **Játék:** Árgyélus és Félix felváltva pakolnak 1×2-es dominókat egy 4×4-es táblára. Árgyélus mindig álló, Félix mindig fekvő dominókat rak. Árgyélus kezd, és az veszít, aki már nem tud rakni.

Megoldás: Árgyélus szerepébe érdemes bújnunk. Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy mi győzzünk, elegendő az alábbi két feltételt teljesítenünk:

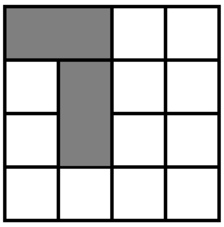
- le tudjuk tenni a 4. dominónkat is,
- a tábla ne legyen teljesen lefedhető dominókkal.

Ugyanis ha biztosítani tudjuk, hogy a tábla ne legyen teljesen lefedhető, akkor nem fog ráférni 8 dominó, így Félix már nem fogja tudni letenni a 4. dominóját.
Kezdésként fedjünk le a tábla négy középső mezője közül kettőt:

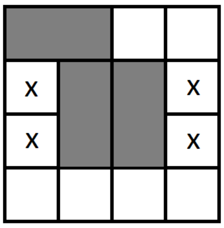


Ekkor szimmetria erejéig az ellenfélnek négyféle válaszlépése van:

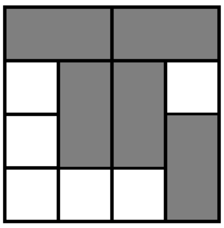
- **1. eset:** az első sor 1. és 2. mezőjét fedi le.



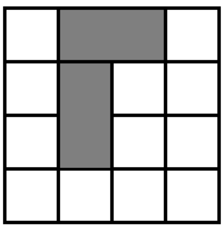
Ekkor fedjük le válaszként a harmadik oszlop középső mezőit.



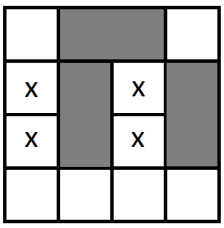
Ekkor látható, hogy az x-szel jelölt mezőket lefoglaltuk magunknak, ezekre az ellenfél már nem tud tenni. Így az már bizonyos, hogy mind a 4 dominónknak jutni fog hely. Így már csak arról kell gondoskodnunk, hogy a tábla ne legyen teljesen kitölthető. Ezt úgy tudjuk elérni, hogy a jobb oldali oszlopba eggyel felfelé vagy lefelé csúsztatva helyezzük el a következő dominónkat (lásd pl. mint a következő ábrán). Ekkor ha az ellenfél 2. dominóját nem számítjuk, akkor világos, hogy két páratlan nagyságú részre osztottuk a táblát, így azt dominókkal nem lehet lefedni teljesen (így értelemszerűen az ellenfél 2. dominójával együtt sem).



- **2. eset:** az első sor 2. és 3. mezőjét fedi le.

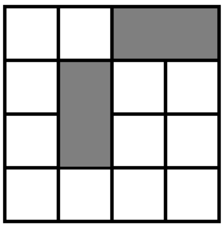


Ekkor rakjunk a negyedik oszlop két középső mezőjére.

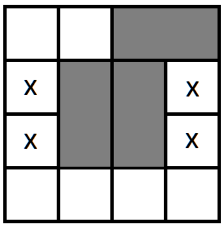


Ezzel a négy x-szel jelölt helyet lefoglaltuk, így a 4 dominónk lehelyezése garantált, és természetesen a jobb felső sarok lefedhetetlen, garantálva a győzelmünket.

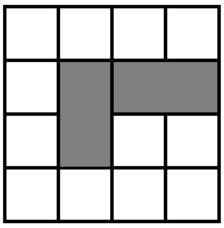
- **3. eset:** az első sor 3. és 4. mezőjét fedi le.



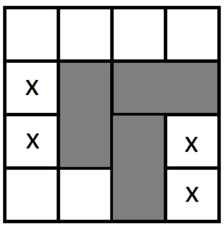
Ekkor tegyünk a 3. oszlop középső mezőire, az 1. esetben létrehozottal szimmetrikus helyzetet létrehozva. Ezután nyerjünk ugyanúgy, ahogy azt az 1. esetben leírtuk.



- **4. eset:** a második sor 3. és 4. mezőjét fedi le.



Ekkor tegyünk a harmadik oszlop 3. és 4. mezőjére:



Ezzel az x-szel jelölt mezőket lefoglaltuk, így a 4 dominó garantáltan meglesz. A tábla lefedhetetlensége érdekében a 3. dominónkat az első sorban eggyel felfelé vagy lefelé csúsztatva helyezzük el (valamelyik irányt biztosan szabadon hagyja az ellenfél), ezzel ismét garantálva a tábla páratlan területű részekre való feldarabolását.