



1. a) Ki lehet-e színezní a pozitív racionális számokat pirossal és kékkel úgy, hogy piros és kék szám is keletkezzen, és bármely két azonos színű szám összege is velük egyszínű legyen?
- b) Ki lehet-e színezní a pozitív racionális számokat pirossal és kékkel úgy, hogy piros és kék szám is keletkezzen, és bármely két azonos színű szám szorzata is velük egyszínű legyen?

2. Albrecht felrajzol a táblára egy 8×8 -as táblázatot, majd minden mezőjébe 0-t vagy 1-et ír. Ezután felírja a sorok és oszlopok végére a bennük szereplő $8 - 8$ szám összegét, és letörli a táblázatban lévő számokat. Ezután azt mondja Bertoldnak, hogy az összegekből egyértelműen visszaállítható a táblázat, amelyet letörölt. Lássátok be, hogy ekkor a letörölt táblázatban volt csak 0-t tartalmazó sor, vagy csak 1-et tartalmazó oszlop!

3. Határozzátok meg azon (p, q, r) prímekből álló hármassokat, amelyekre $p^q + p^r$ négyzetszám.

4. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, és legyenek az A, B, C csúcsokhoz tartozó belső szögek rendre α, β, γ . Emeljünk a háromszög oldalaira, mint alapokra kifelé BCA_1, CAB_1, ABC_1 egyenlőszárú háromszögeket, amelyek csúcshögei rendre $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$. Legyen A_2 az AA_1 és B_1C_1 egyenesek metszéspontja, és vegyük fel B_2 és C_2 pontokat is hasonló módon. Határozzátok meg az

$$\frac{AA_1}{A_2A_1} + \frac{BB_1}{B_2B_1} + \frac{CC_1}{C_2C_1}$$

kifejezés pontos értékét!

5. Az Óxisz wellnessbolygó egyik szállodájában 2019 darab szauna található. A vezetőség úgy dönt, hogy k házaspárt fogad a közelgő hosszú hétvégére. A házaspárokról tudjuk, hogy ha két feleség ismeri egymást, akkor a férjeik is ismerik egymást, és viszont. A szaunákra viszont szigorú megkötések vannak: egy szaunában vagy csak férfiak, vagy csak nők lehetnek. A nők csak olyan nőekkel hajlandók együtt szaunázni, akiket ismernek. A férfiak csak olyan férfiakkal hajlandók együtt szaunázni, akiket nem ismernek. Mi lehet az a legnagyobb k , amely esetén tudjuk garantálni, hogy akárhogy is ismerik a házaspárok egymást, be tudnak menni mindannyian a 2019 szaunába a feltételeknek megfelelően?

6. **Játék:** A játék kezdetén a szervezők kiraknak korongokat néhány kupacban. A két játékos felváltva lép. Minden körben az ellenfél kijelöl két kupacot (ha már csak egy van, akkor azt az egyet), és a soron lévő játékos a két kijelölt kupac egyikéből elvesz néhány korongot (legalább egyet, de akár az összeset is). Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írtjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szereshető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.

A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!