**E1.** **a)** Ki lehet-e színezni a pozitív racionális számokat pirossal és kékkel úgy, hogy piros és kék szám is keletkezzen, és bármely két azonos színű szám összege is velük egyszínű legyen?
**b)** Ki lehet-e színezni a pozitív racionális számokat pirossal és kékkel úgy, hogy piros és kék szám is keletkezzen, és bármely két azonos színű szám szorzata is velük egyszínű legyen?

**Megoldás:**

**a)** Nem lehet, és ezt indirekten bizonyítjuk. Ekkor egy tetszőleges racionális szám egész számszorosai mind ugyanolyan színűek. Ezt indukcióval látjuk be (feltehetjük, hogy $x$ (a számunk) kék).

$n = 1$-re $nx = x$ kék. Tegyük fel, hogy egy adott $n$-re igaz. Ekkor $n+1$-re: $(n+1)x = nx+x$, tehát $(n+1)x$ két kék szám összege, így az is kék.

Mivel van kék és piros számunk is, legyen $\frac{p}{q}$ kék, és $\frac{r}{s}$ piros ($p,\ q,\ r,\ s$ pozitív egészek). Ekkor $pr$ az $\frac{p}{q}$-nak és $\frac{r}{s}$-nek is egész számszorosa, tehát egyszerre kék és piros. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így bebizonyítottunk hogy nem lehet a pozitív racionálisokat így kiszínezni.

**b)** Van megfelelő színezés, többet is fogunk mutatni.

Az első példánk az, hogy az 1-nél kisebb számok legyenek pirosak, a nála nagyobbak kékek, az 1 pedig legyen szintén piros. Ekkor nyilván azonos színű számok szorzata ugyanolyan színű lesz, és minden racionális számot kiszíneztünk.

A második példánk a következő: legyen a 2 kitevője egy racionális számban az az egész szám, amely a 2 kitevője a szám számlálójában mínusz a 2 kitevője a szám nevezőjében. Ez egyértelmű a racionális szám bármely tört alakban való felírására. Legyenek azok a számok pirosak, amelyekben a 2 kitevője $\leq 0$, és legyenek azok a kékek, amelyekben a 2 kitevője pozitív. Ekkor a pirosak szorzata piros lesz, a kékeké pedig kék, tehát ez is egy megfelelő színezés.

**E2.** Albrecht felrajzol a táblára egy $8 \times 8$-as táblázatot, majd minden mezőjébe 0-t vagy 1-et ír. Ezután felírja a sorok és oszlopok végére a bennük szereplő $8-8$ szám összegét, és letörli a táblázatban lévő számokat. Ezután azt mondja Bertoldnak, hogy az összegekből egyértelműen visszaállítható a táblázat, amelyet letörölt. Lássátok be, hogy ekkor a letörölt táblázatban volt csak 0-t tartalmazó sor, vagy csak 1-et tartalmazó oszlop!

**Megoldás:** Indirekten bizonyítjuk a feladat állítását. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, tehát van egy olyan táblázat, amelyhez egyértelműek az összegek, de nincsen benne csak 0-t tartalmazó sor, se csak 1-et tartalmazó oszlop.

Ez ekvivalens azzal, hogy minden sorban található olyan mező, amelyben 1-es szerepel, és minden oszlopban található mező, amelyben 0-s szerepel.

Vegyünk a táblázatból ekkor egy mezőt, melyben 0 szerepel, legyen ez $M_1$. $M_1$ sorában van egy mező, melyben 1-es van, legyen ez a mező $M_2$. Hasonlóképp legyen $M_3$ egy 0 $M_2$ oszlopában. Folytatva ezt az algoritmust, valamikor vissza fogunk érni egy már érintett mezőre (legkésőbb 65 lépésen belül), legyen az első ilyen mezőpár $M_i = M_j$ $(i < j)$.

Ekkor az $M_i$, $M_{i+1}$, $\ldots M_{j-1}$ mezőkön megváltoztatva a számokat 0-ról 1-re és fordítva, minden sorban (illetve oszlopban) ugyanannyi számot cserélünk 0-ról 1-re és 1-ről 0-ra, tehát nem változik egy összeg sem, viszont kapunk egy különböző táblázatot, amelyhez ugyanazok az összegek tartoznak. Ez ellentmond a feltevésünknek, így az nem igaz. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

**E3.** Határozzátok meg azon $(p, q, r)$ prímekből álló hármasokat, amelyekre $p^q + p^r$ négyzetszám.

**Megoldás:** Bontsuk a feladat megoldását két esetre:

1. eset: $q = r$. Ekkor a $p^q + p^q = 2p^q = n^2$ egyenletnek keressük az egész megoldásait. Mivel az egyenlőség bal oldala osztható 2-vel, így $2 \mid n^2$, viszont akkor $4 \mid n^2$ is teljesül. Ekkor pedig a bal oldal is osztható 4-gyel, ami csak akkor teljesülhet, ha $p = 2$. Tehát $2 \cdot 2^q = 2^{q+1} = n^2$. Mivel egy négyzetszámban minden prím páros hatványon szerepel, így $q$ páratlan. Ha $q = 2k+1$ páratlan prím, akkor pedig $2^q + 2^q = \left(2^{k+1}\right)^2$, tehát $p = 2$, $q = r$ páratlan prím esetén $(p, q, r)$ megoldás lesz.

2.eset: $q \neq r$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $q < r$, a megoldások megadásánál ezt figyelembe vesszük majd.

Ebben az esetben a $p^q(1+p^{r-q}) = n^2$ egyenlet egész megoldásait keressük. Mivel $q < r$, így $p \nmid 1+p^{r-q}$, tehát a $p$ kitevője $n^2$-ben $q$, amelynek így párosnak kell lennie, tehát $q = 2$. Ekkor $p \mid n$, legyen $n = k \cdot p$ valamely $k$ egészre. Így

$$p^2(1+p^{r-2}) = k^2p^2$$
$$1+p^{r-2} = k^2$$
$$p^{r-2} = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$$

Tehát $k+1$ és $k-1$ azonos prímnek két hatványa, ami csak akkor fordulhat elő, ha ez a két szám a 3 és 1, vagy 4 és 2 (ez könnyen meggondolható, hiszen ha $p \geq 5$, akkor bármely két hatványának különbsége legalább 4). Az előbbi esetben $p = 3$, $r = 3$, $q = 2$, az utóbbi esetben $p = 2$, $r = 5$, $q = 2$.

Vagyis ha $q \neq r$, akkor a $(2,2,5)$, $(2,5,2)$, $(3,2,3)$ és $(3,3,2)$ hármasok elégítik ki a feladat feltételeit. Leellenőrizhető, hogy az öszegként kapott négyzetszám minden esetben a 36.

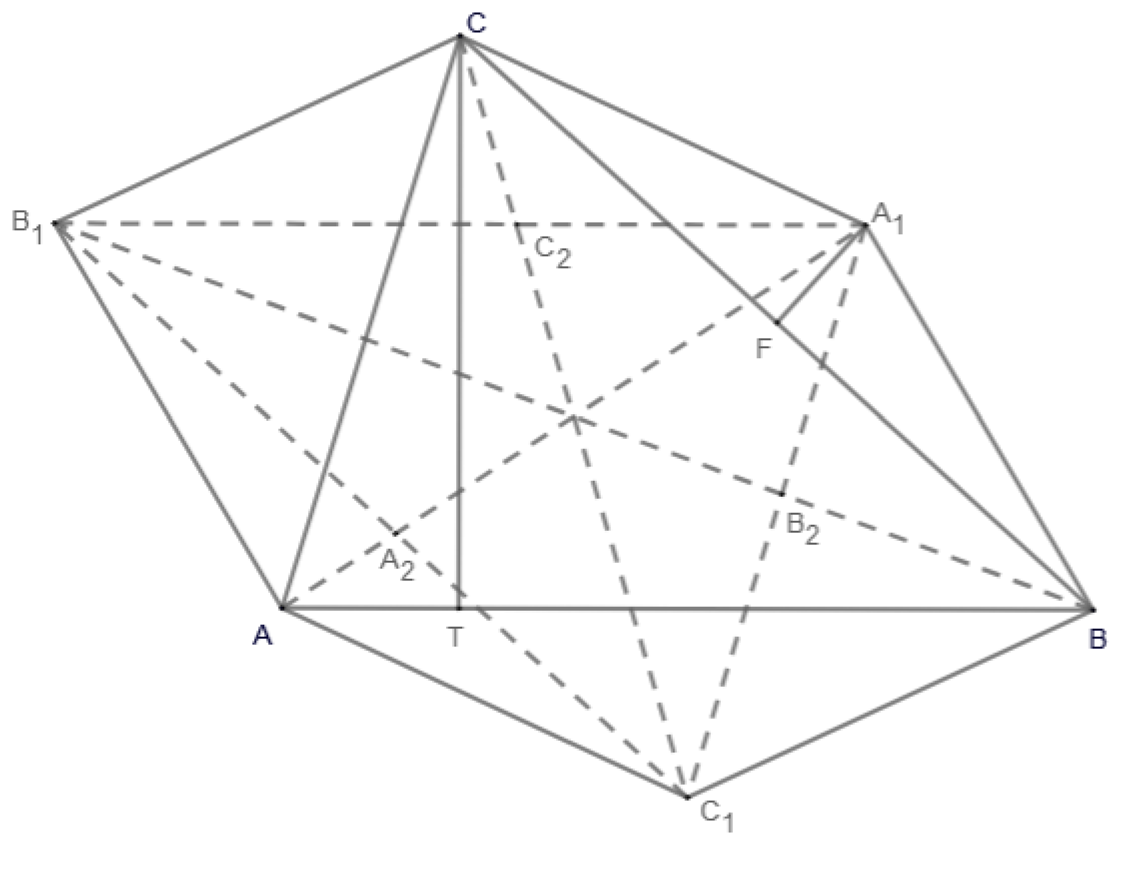
Tehát megoldást a $(2,2,5)$, $(2,5,2)$, $(3,2,3)$, $(3,3,2)$ valamint a $(2,s,s)$ (ahol $s$ páratlan prím) hármasok szolgáltatnak.

**E4.** Legyen $ABC$ hegyesszögű háromszög, és legyenek az $A$, $B$, $C$ csúcsokhoz tartozó belső szögek rendre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Emeljünk a háromszög oldalaira, mint alapokra kifelé $BCA_1$, $CAB_1$, $ABC_1$ egyenlőszárú háromszögeket, amelyek csúcsszögei rendre $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$. Legyen $A_2$ az $AA_1$ és $B_1C_1$ egyenesek metszéspontja, és vegyük fel $B_2$ és $C_2$ pontokat is hasonló módon. Határozzátok meg az

$$\frac{AA_1}{A_2A_1} + \frac{BB_1}{B_2B_1} + \frac{CC_1}{C_2C_1}$$

kifejezés pontos értékét!

**Megoldás:**



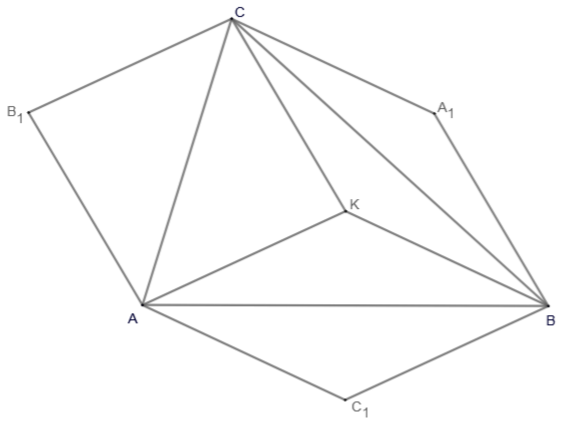
Először vizsgáljuk meg jobban ezeket a törteket:

$$\frac{AA_1}{A_2A_1} = \frac{AA_2 + A_2A_1}{A_2A_1} = 1 + \frac{AA_2}{A_2A_1} = 1 + \frac{T_{AC_1B_1}}{T_{A_1B_1C_1}}$$

Innentől kezdve ezen háromszögek területeinek meghatározására törekszünk.
Legyen a $C$-ből induló magasság talppontja $T$, a $BC$ oldal felezőpontja pedig $F$. Ekkor az $ATC$ és $A_1FC$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik megegyeznek. Legyenek az $ABC$ háromszög oldalai $a, b, c$, területe $t$. Ekkor

$$A_1C = CF \cdot \frac{AC}{CT} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{\frac{2t}{c}} = \frac{abc}{4t}.$$

Ezt a számítást szimmetrikusan az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög oldalaira elvégezve azt kapjuk, hogy ennek a hatszögnek az összes oldala egyenlő hosszúságú.
Rövid számolással adódik, hogy a hatszög $A, B, C$ csúcsainál lévő szögek rendre $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, tehát a hatszög szemközti szögei megegyeznek. Ebből következik, hogy például az $AC_1B_1$ és az $A_1BC$ háromszögek egybevágóak, mivel megegyezik $2-2$ oldaluk hossza és az általuk bezárt szög nagysága. Ezek szerint az $ABC$ és $A_1B_1C_1$ háromszögek is egybevágóak, mivel oldalaik páronként egyenlő hosszúságúak.




Tükrözzük az $A_1$ pontot a $BC$ oldalegyenesre, a képe legyen $K$. Ekkor az $AKB$ és $AC_1B$, valamint az $AKC$ és $AB_1C$ háromszögek egybevágóak, mivel megegyezik $2-2$ oldaluk és az általuk közrezárt szög.

Vessünk egy pillantást a kiszámolandó kifejezésre, ugyanis minden szükséges információ a rendelkezésünkre áll:

$$\frac{AA_1}{A_2A_1} + \frac{BB_1}{B_2B_1} + \frac{CC_1}{C_2C_1} = 3 + \frac{T_{AC_1B_1}}{T_{A_1B_1C_1}} + \frac{T_{A_1CB_1}}{T_{A_1B_1C_1}} + \frac{T_{A_1C_1B}}{T_{A_1B_1C_1}} = 3 + \frac{T_{A_1BC} + T_{AB_1C} + T_{ABC_1}}{t} =$$

$$= 3 + \frac{T_{KBC} + T_{KAC} + T_{KAB}}{t} = 3 + 1 = 4.$$

Tehát a keresett kifejezés értéke 4.

**E5.** Az Óxisz wellnessbolygó egyik szállodájában 2019 darab szauna található. A vezetőség úgy dönt, hogy $k$ házaspárt fogad a közelgő hosszú hétvégére. A házaspárokról tudjuk, hogy ha két feleség ismeri egymást, akkor a férjeik is ismerik egymást, és viszont. A szaunákra viszont szigorú megkötések vannak: egy szaunában vagy csak férfiak, vagy csak nők lehetnek. A nők csak olyan nőkkel hajlandók együtt szaunázni, akiket ismernek. A férfiak csak olyan férfiakkal hajlandók együtt szaunázni, akiket nem ismernek. Mi lehet az a legnagyobb $k$, amely esetén tudjuk garantálni, hogy akárhogy is ismerik a házaspárok egymást, be tudnak menni mindannyian a 2019 szaunába a feltételeknek megfelelően?

**Megoldás:**

*Lemma:* Legyen $G$ gráf kromatikus száma $\chi(G)$. (Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb szám, ahány színnel a gráf csúcsai színezhetők úgy, hogy bármely él két különböző színű csúcsot köt össze.) Ekkor $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V(G)| + 1$ (ahol $\overline{G}$ a $G$ gráf komplementere és $|V(G)|$ $G$ csúcsainak száma).

*Lemma bizonyítása:* $G$ csúcsszámára vonatkozó teljes indukcióval. Az állítás 1 csúcsú gráfra igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz, ha a gráfnak $n$ csúcsa van. Vegyünk egy $n$ csúcsú $G$ gráfot! Erre igaz, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V(G)| + 1$. $G$-hez vegyünk hozzá egy $v$ csúcsot, amely össze van kötve $G$ néhány csúcsával. Az így kapott gráf legyen $G'$! A $v$ csúcs hozzávételével a gráfnak, illetve komplementerének kromatikus száma is eggyel nőtt, vagy ugyanannyi maradt.

Ha $G$-re teljesül, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V(G)|$, akkor az előző miatt $G'$re teljesül, hogy $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq |V(G)| + 2 = |V(G')| + 1$. Tehát ekkor az állítás igaz $G'$-re.

Ha $G$-re $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = |V(G)| + 1$. Tegyük fel, hogy az állítás $G'$-re nem igaz! Vegyük $G$ egy színezését $\chi(G)$ színnel! Mivel $v$ hozzávétele növelte a kromatikus számot, így $v$ össze van kötve $G$-ben minden színosztályból legalább egy csúccsal. Most vegyük $\overline{G}$ színezését $\chi(\overline{G})$ színnel! Ekkor $\overline{G'}$-ben $v$ össze van kötve minden színosztályból legalább egy csúccsal, mivel $\chi(G) < \chi(G')$. Mivel két csúcs nem lehet összekötve egyszerre $G'$-ben és $\overline{G'}$-ben is, így $v$ legalább $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = |V(G)| + 1$ különböző csúccsal van összekötve $G$-ben vagy $\overline{G}$-ben, ami ellentmondás, mivel $G$-nek csak $|V(G)|$ csúcsa van. Tehát az állítás ekkor is igaz $G'$-re.

*A feladat megoldása:* Legyen $G$ a házaspárok ismerettségi gráfja, azaz a csúcsok a házaspárok, két csúcs pedig pontosan akkor van összekötve, ha a két házaspár ismeri egymást. Ekkor a feladatnak megfelelően a férfiak $\chi(G)$, a nők pedig $\chi(\overline{G})$ szaunába oszthatóak be (a színosztályoknak megfelelően). A lemmából tudjuk, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V(G)| + 1$, tehát $|V(G)| = 2018$ esetén, azaz 2018 házaspárra a 2019 szauna biztosan elegendő. Ha 2019 házaspár van, akkor ha semely két házaspár nem ismeri egymást, akkor már 2020 szaunára lenne szükség.

Tehát 2018 házaspár esetén biztosítható minden esetben, hogy a 2019 szauna elegendő legyen a megadott feltételeknek megfelelően.

**E6.** **Játék: lásd az E+ kategória megoldásainál.**

**E+1.** Legyen $a_0, a_1 \dots, a_n$ egy valós számokból álló, monoton növő $n+1$ tagú sorozat, ahol $a_0 = 0$ és minden $j > i$-re $a_j - a_i \leq j - i$. Mutassátok meg, hogy ekkor

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n} a_i^3.$$

**Megoldás:**

Teljes indukció: n=0-ra $0 \geq 0$ teljesül.

Indukciós lépés n-1-ről n-re: Bizonyítandó:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n} a_i^3 \tag{1}$$

Tudjuk:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i^3 \tag{2}$$

(1)-hez (2) alapján elég:

$$a_n^2 + 2a_n \sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq a_n^3 \tag{3}$$

Ha $a_n = 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 van. A továbbiakban $a_n \neq 0$

Egyszerűsítve:

$$a_n + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq a_n^2 \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq \frac{a_n(a_n - 1)}{2} \tag{5}$$

Tudjuk, hogy

$$\frac{a_n(a_n - 1)}{2} \leq \frac{(a_{n-1} + 1)a_{n-1}}{2} \tag{6}$$

a feladat feltételeiből. Tehát elég látni, hogy

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq \frac{(a_{n-1} + 1)a_{n-1}}{2} \tag{7}$$

Legyen $a_{n-1} = k + x$, ahol $k$ egész, és $x < 1$. Ekkor

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq (k - 1 + x) + (k - 2 + x) + \dots + x + 0 + \dots + 0 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)x \tag{8}$$

$$\frac{(a_{n-1} + 1)a_{n-1}}{2} = \frac{(k + x + 1)(k + x)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(2k+1)x}{2} + \frac{x^2}{2} \tag{9}$$

Tehát

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)x \geq \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(2k+1)x}{2} + \frac{x^2}{2}, \tag{10}$$

mivel $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x}{2}$, mert $x < 1$.

**E+2.** Bizonyítsátok be, hogy ha egy háromszög oldalhosszai egészek, és köréírt körének sugara prím, akkor a háromszög derékszögű.

**Megoldás:** Legyenek a háromszög oldalai $a$, $b$, $c$, területe $T$, valamint köré írható körének sugara $R$. Ekkor a köré írt kör sugarára vonatkozó ismert összefüggésből adódik, hogy

$$4T = \frac{abc}{R}.$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy $4T$ racionális. Másrészt a Hérón-képletet felhasználva

$$4T = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Tehát $4T$ racionális, ráadásul egy egész szám négyzetgyöke, amiből az következik, hogy $4T$ egész szám. Ezért valamelyik oldalhosszat osztja $R$, mivel $R$ prímszám, mondjuk legyen ez az oldal $a$. Tegyük fel, hogy a háromszög nem derékszögű. Ekkor

$$0 < a, b, c < 2R,$$

tehát $a = R$. Legyen az $A$ csúcsnál lévő szög $\alpha$. Ekkor $a = 2R \sin \alpha$, vagyis $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A bal oldal racionális, míg a jobb oldal irracionális, ellentmondásra jutottunk, vagyis a háromszög derékszögű.
Most már csak azt kell megvizsgálni, hogy létezik-e ilyen derékszögű háromszög, de természetesen van ilyen, pl. a $6, 8, 10$ oldalhosszúságú derékszögű háromszög köré írható körének sugara 5.

**E+3.** Minden $n \geq 2$ pozitív egészre jelöljük $f(n)$-nel azon $n$-nél nem nagyobb pozitív egészek összegét, melyek nem relatív prímek $n$-hez. Legyen $p > 2$ prím, $n \geq 2$, melyre $p \nmid n$.
Lássátok be, hogy $f(n+p) \neq f(n)$.

**Megoldás:** Tudjuk, hogy $k$ pontosan akkor nem relatív prím $n$-hez, ha $n - k$ nem relatív prím $n$-hez. Ha $n$ páratlan, akkor így az összes összeadandót párba állítottuk, ahol a párok összege $n$, tehát $n \mid f(n)$. Ha $n$ páros, akkor $\frac{n}{2}$-nek nincs párja, így ekkor csak azt állíthatjuk, hogy $n \mid 2f(n)$.

Indirekten tegyük fel, hogy $f(n) = f(n+p)$. Mivel $n$ és $p$ relatív prímek, és $n \mid 2f(n)$, illetve $n + p \mid 2f(n)$, tehát $n(n+p) \mid 2f(n)$, de $2f(n)$ kisebb, mint 1-től $n$-ig a számok összegének kétszerese, azaz $n(n+1)$ így azt kapjuk, hogy $n(n+p) \leq n(n+1)$ ami ellentmondás. Ezzel készen vagyunk.

**E+4.** Az Intergalaktikus Lottón 55 számból húznak ki 7-et. R2-D2 és C-3PO elhatározzák, hogy mindenképpen megnyerik a lottót, ezért ketten együtt megjátsszák az összes lehetséges szelvényt.
Mutassátok meg, hogy valamelyikük szelvényei közt van hét olyan szelvény, melyeken nincs két azonos szám!

**Megoldás:**

Általánosabb állítást bizonyítunk: A $nk + n - 1$ elemű halmaz $k$ elemű részhalmazait 2 csoportba osztva az egyik csoportban lesz $n$ db páronként diszjunkt halmaz.

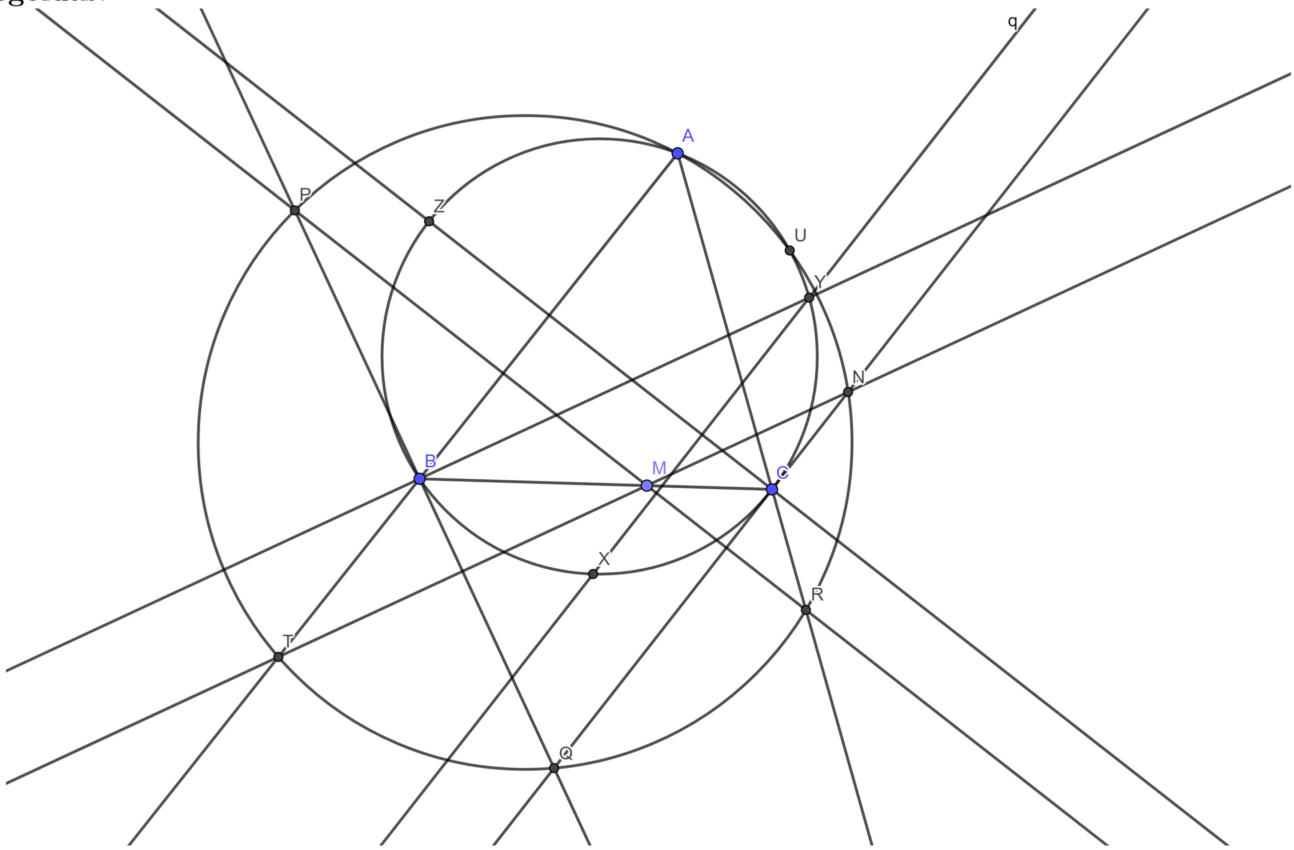
Ezt az állítást $n$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.
Kezdőlépés: $n = 1$ esetén az az állítás, hogy $k$ elemű halmaz $k$ elemű részhalmazait 2 csoportba osztva

az egyikben lesz egy $k$ elemű halmaz, ami nyilvánvalóan igaz.
Ha már $n$-re tudjuk, belátjuk $n+1$-re:
Ha nincsenek olyan $A$ és $B$ $n$ elemű részhalmazok, amelyeknek a metszete $k-1$ elemű, és külön csoportban vannak, akkor könnyen látható, hogy az összes részhalmaznak egy csoportban kell lennie, és ekkor természetesen igaz az állítás.
Ha van olyan $A$ és $B$ részhalmaz, amelyek külön csoportban vannak, és $k-1$ közös elemük van, akkor $|A \cup B| = k+1$, így van $(n+1)k+(n+1)-1-(k+1) = nk+n-1$ elem, amely se $A$-ban, se $B$-ben nincs benne, ezen elemekre használva az indukciós feltevést azt kapjuk, hogy van $k$ darab páronként diszjunkt részhalmaz egy csoportban ezek közül. Ehhez $A$-t vagy $B$-t hozzá tudjuk venni egy $n+1$-edik részhalmaznak, mivel különböző csoportban vannak. Ezzel igazoltuk az állítást.

$n = k = 7$ helyettesítéssel pont a bizonyítandó állítást kapjuk.

**E+5.** Legyenek az $X$, $Y$, $Z$ pontok rendre az $ABC$ hegyesszögű háromszög köréírt körének rövidebbik $BC$, $CA$, $AB$ íveinek felezőpontjai. Legyen $M$ tetszőleges pont a $BC$ oldalon. Az $M$-en keresztül párhuzamost húzunk a $CBA\sphericalangle$ belső szögfelezőjével, ez a $BCA\sphericalangle$ külső szögfelezőjét az $N$ pontban metszi. $M$-en keresztül párhuzamost húzunk a $BCA\sphericalangle$ belső szögfelezőjével is, ez pedig a $CBA\sphericalangle$ külső szögfelezőjét a $P$ pontban metszi.
Bizonyítsátok be, hogy $XM$, $YN$, $ZP$ egyenesek egy ponton mennek át.

**Megoldás:**




Legyen a $B$ és $C$-hez tartozó külső szögfelezők metszéspontja $Q$, $AB$ és $MN$ egyenesek metszéspontja $T$, $AC$ és $MP$ metszéspontja $R$.
Ekkor $ATQR$ húrnégyszög, mivel $BQ$ az $MT$ szakasz felezőmerőlegese. Hasonlóan $MR$ felezőmerőlegese $CQ$, így $Q$ a $TMR$ háromszög köréírt körének középpontja, így $TMR\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$, tehát a $TQR\sphericalangle$ középponti szög az $180° - \alpha$.
$X$ és $Q$ rajta van a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjén, így $\frac{\alpha}{2} = TAQ\sphericalangle = TNQ\sphericalangle$ szóval $N$ és ugyanígy $P$ is rajta

van az $ATQR$ körön.
Legyen az $ATQR$ és $ABC$ körök 2. metszéspontja $U$, azt állítom, hogy $PZ$, $NY$ és $MX$ is áthalad $U$-n.
Szögszámolásból adódik hogy a $XY$ és $QN$ egyenesek párhuzamosak, így $AUY\sphericalangle = 180° - AXY\sphericalangle = 180° - AQN\sphericalangle = AUN\sphericalangle$, így $U, Y, N$ tényleg egy egyenesre esnek, hasonlóan $U, Z, P$ is.
Ezeket használva $UNM\sphericalangle = UYB\sphericalangle = UCB\sphericalangle = UCM\sphericalangle$, tehát $UNCM$ húrnégyszög. Így $MUC\sphericalangle = MNC\sphericalangle = BYX\sphericalangle = BUX\sphericalangle = XUC\sphericalangle$, tehát $X, M, U$ is egy egyenesen vannak. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

**E+6.** **Játék:** A játék elején kirakunk az asztalon néhány kupacban kavicsokat. Egy játékos körében az alábbi két dolog történik egymás után: - a játékos ellenfele rámutat a kupacok közül kettőre (ha már csak egy van, akkor arra az egyre), - majd a játékos az egyik mutatott kupacból elvesz néhány kavicsot (legalább egyet, és akár az összeset is). Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

**Megoldás:**

Nevezzük *nyerőállás*nak azokat az állásokat, melyekben ha mi vagyunk soron, garantáltan nyerni tudunk! A többi állást (azaz amelyekben sorra következve mindenképpen veszítünk az ellenfél optimális játéka esetén) *vesztőállás*nak nevezzük.

Legyen egy állásban a legkisebb kupacméret $k$. Azt állítjuk, hogy az állás pontosan akkor nyerőállás, ha páratlan sok $k$ méretű kupac van.

A bizonyítás a kavicsok összes száma szerinti indukcióval történik. Ha csak egy kavics van, akkor $k = 1$ és páratlan sok 1 méretű kupac van, és nyilvánvalóan nyerőállásban vagyunk (a kavicsot elvehetjük).

Tegyük most fel, hogy a legkisebb kupacméret páratlan sok példányban fordul elő. Ha egy kupac van, akkor nyilván nyerőállásban vagyunk, hiszen egyszerre elvehetünk mindent. Ha pedig legalább kettő van, akkor beláthatjuk, hogy ekkor akárhogyan választ ki nekünk két kupacot az ellenfél, mindig létre tudunk hozni egy vesztőállást. Két eset van:

- **1. eset: mindkét kijelölt kupac $k$ méretű**. Ekkor az egyik $k$ méretű kupacot teljes egészében elvesszük. Így a $k$ méretű kupacok száma páratlanról párosra változik; és $k$ marad a legkisebb kupacméret, így vesztőállást hoztunk létre.
- **2. eset: van $k$-nál nagyobb méretű kijelölt kupac**. Ekkor vegyünk el egy ilyen kupacból annyi kavicsot, hogy $k$ maradjon benne. Ekkor a $k$ méretű kupacok számát eggyel megnöveltük, így páros sok lesz belőle, ami vesztőállás.

Tegyük most fel, hogy a legkisebb kupacméret páros sok példányban fordul elő. Ekkor garantáltan legalább 2 kupac van. Beláthatjuk, hogy ekkor mindenképp vesztőállásban vagyunk. Ugyanis ha az ellenfél kijelöl nekünk kettőt a legkisebb méretű kupacok közül, akkor kénytelenek leszünk valamelyikből valahány kavicsot elvenni, és ezzel mindenképpen nyerőállást létrehozni:

- ha egy kupacot teljesen kiürítünk, akkor a legkisebb kupacméret $k$ marad, és a $k$ méretű kupacok száma eggyel csökkent, tehát párosról páratlanra változott;
- ha egy kupacból néhány kavicsot elveszünk, de nem az összeset, akkor az lesz az egyedüli legkisebb kupac, tehát páratlan sok legkisebb kupac lesz a lépésünk után.

(Az indukciós feltevést ott használtuk, amikor a lépésünk után hagyott (ezáltal szükségszerűen az eredetinél kevesebb kavicsot tartalmazó) állásról a legkisebb kupacok darabszáma alapján döntöttük el, hogy nyerő-e vagy sem.)