Döntő: 2019. február 1.

Matematika kifejtős

XII. Dürer Verseny

E+ kategória

1. Legyen $a_0, a_1 \ldots, a_n$ egy valós számokból álló, monoton növő $n+1$ tagú sorozat, ahol $a_0 = 0$ és minden $j > i$-re $a_j - a_i \leq j - i$. Mutassátok meg, hogy ekkor

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n} a_i^3.$$

2. Bizonyítsátok be, hogy ha egy háromszög oldalhosszai egészek, és köréírt körének sugara prím, akkor a háromszög derékszögű.

3. Minden $n \geq 2$ pozitív egészre jelöljük $f(n)$-nel azon n-nél nem nagyobb pozitív egészek összegét, melyek nem relatív prímek n-hez. Legyen $p > 2$ prím, $n \geq 2$, melyre $p \nmid n$.
Lássátok be, hogy $f(n+p) \neq f(n)$.

4. Az Intergalaktikus Lottón 55 számból húznak ki 7-et. R2-D2 és C-3PO elhatározzák, hogy mindenképpen megnyerik a lottót, ezért ketten együtt megjátsszák az összes lehetséges szelvényt.
Mutassátok meg, hogy valamelyikük szelvényei közt van hét olyan szelvény, melyeken nincs két azonos szám!

5. Legyenek az X, Y, Z pontok rendre az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének rövidebbik BC, CA, AB íveinek felezőpontjai. Legyen M tetszőleges pont a BC oldalon. Az M-en keresztül párhuzamost húzunk a $CBA\sphericalangle$ belső szögfelezőjével, ez a $BCA\sphericalangle$ külső szögfelezőjét az N pontban metszi. M-en keresztül párhuzamost húzunk a $BCA\sphericalangle$ belső szögfelezőjével is, ez pedig a $CBA\sphericalangle$ külső szögfelezőjét a P pontban metszi.
Bizonyítsátok be, hogy XM, YN, ZP egyenesek egy ponton mennek át.

6. Játék: A játék kezdetén a szervezők kiraknak korongokat néhány kupacban. A két játékos felváltva lép. Minden körben az ellenfél kijelöl két kupacot (ha már csak egy van, akkor azt az egyet), és a soron lévő játékos a két kijelölt kupac egyikéből elvesz néhány korongot (legalább egyet, de akár az összeset is). Az nyer, aki az utolsó korongot elveszi.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.