Döntő: 2019. február 2.

Matematika váltó

XII. Dürer Verseny

E+ kategória

E$^+$-1. Legfeljebb hány pozitív egész számot adhatunk meg úgy, hogy semelyik 2 összege és különbsége se legyen osztható 2019-cel? (3 pont)

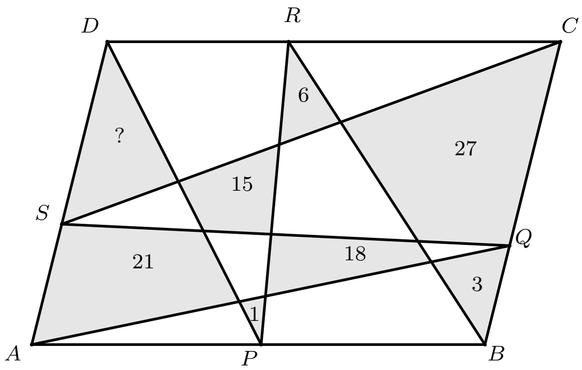
E$^+$-2. Hány számjegyből áll 81-nek azon legkisebb többszöröse, amelynek minden számjegye 1-es? (3 pont)

E$^+$-3. Egy ABC háromszögben adott egy P belső pont. Behúzzuk az AP, BP és CP egyeneseket, ezek az oldalakat 2-2 részre osztják. Az így keletkező 6 oldalrész mind különböző egész szám. Mi a háromszög minimális kerülete? (3 pont)

E$^+$-4. Egy kockát felosztottunk 27 egybevágó kis kockára. Egy egyenes legfeljebb hány kis kocka belsejébe metszhet bele? (3 pont)

E$^+$-5. Hány olyan s permutációja van az $\{1, 2, \ldots, 15\}$ halmaznak, melyre minden $1 \leq k \leq 13$ esetén $s(k) < s(k+2)$ és minden $1 \leq k \leq 12$ esetén $s(k) < s(k+3)$? (4 pont)

E$^+$-6. Egy $ABCD$ paralelogramma minden oldalán kiválasztottunk egy-egy pontot, legyenek ezek P, Q, R és S. Ezután az ábra szerinti szakaszok behúzásával tartományokra osztottuk a négyszöget. A szürke színű részek területét ismerjük (lásd ábra). Mekkora a ?-lel jelölt rész területe? (4 pont)

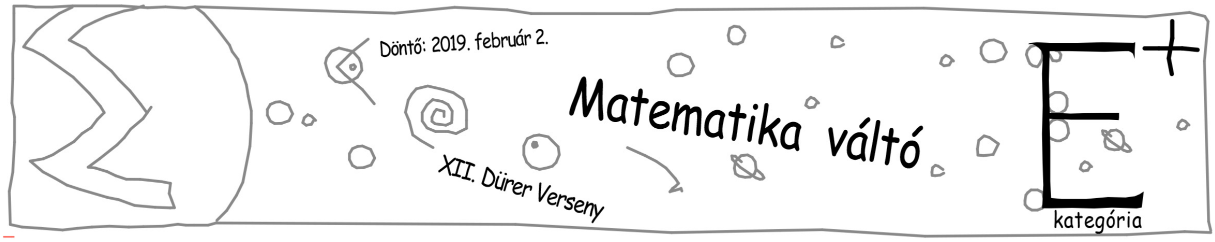


E$^+$-7. Melyik az a legkisebb n pozitív egész, amelyre 1-től 10^n-ig az összes szám összes nem 0 számjegyének reciprokát összeadva egész számot kapunk? (4 pont)

E$^+$-8. Legyen N pozitív egész, melyre N és N^2 ugyanarra a 4 jegyre, *abcd*-re végződik, ahol $a \neq 0$. Mennyi az *abcd* 4-jegyű szám? (4 pont)

E$^+$-9. Hányféleképpen tudunk kiszínezni fekete-fehérre egy 6×6-os négyzetrácsot úgy, hogy minden 2×2-es négyzetben páratlan sok fekete négyzet legyen? (5 pont)

E$^+$-10. Mi lehet a legkisebb értéke a, b, c, d legkisebb közös többszörösének, ha tudjuk, hogy ez négy különböző szám, és $a + b + c + d = 1000$? (5 pont)



E$^+$-11. Mi a legkisebb N, melyre

$$\sum_{k=1}^{N} k^{2018}$$

osztható 2018-al? (5 pont)

E$^+$-12. P és Q két különböző, nemkonstans polinom, úgy hogy $P(Q(x)) = P(x)Q(x)$ és $P(1) = P(-1) = 2019$. Mi az utolsó négy számjegye $Q(P(-1))$-nek? (5 pont)

E$^+$-13. Elhelyeztünk körben 12 darab számozott széket. Hányféleképpen lehet közülük néhányat kiválasztani úgy, hogy legyen 3 szomszédos kiválasztott szék? (6 pont)

E$^+$-14. Legyen $\mathcal{S}$ azon pozitív egészek halmaza, amelyek kisebbek, mint 10000, illetve a 2-es számrendszerbeli utolsó 4 számjegye megegyezik az 5-ös számrendszerbeli utolsó 4 számjeggyel. Határozzátok meg az $\mathcal{S}$-beli elemek összegének 10000-rel vett osztási maradékát. (6 pont)

E$^+$-15. Hány olyan m pozitív egész van amelyhez léteznek $x_0, x_1, ..., x_{1001}$ nemnegatív egészek úgy, hogy

$$m^{x_0} = \sum_{i=1}^{1001} m^{x_i}?$$

(6 pont)

E$^+$-16. Az ABC háromszög oldalai 13, 14 és 15 egység hosszúak. Legyen k, k_A, k_B, k_C négy r sugarú kör a háromszög belsejében úgy, hogy k_A érinti az AB és AC oldalt, k_B érinti a BA és BC oldalt, k_C érinti a CA és CB oldalt, és k kívülről érinti a k_A, k_B, k_C köröket. Legyen $r = \frac{m}{n}$, ahol m és n relatív prímek. Mennyi $m + n$? (6 pont)