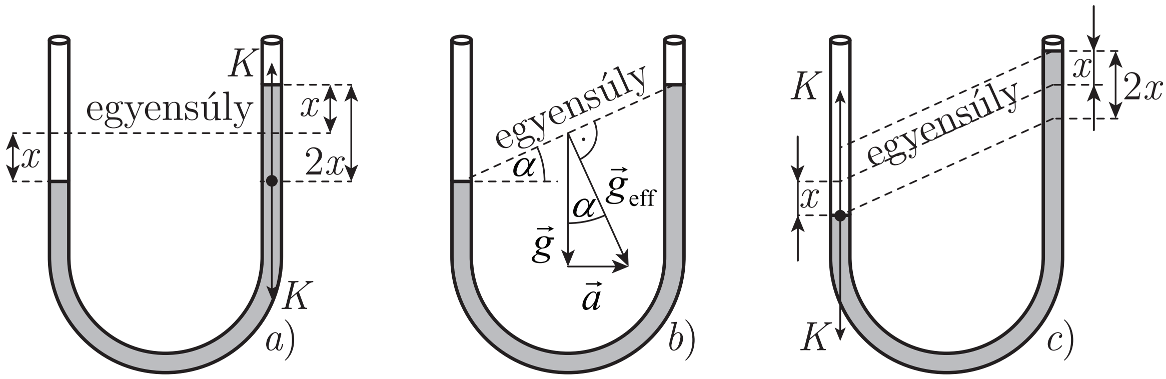
1. Feladat

(a) feladatrész

Tekintsük az 1.a ábrát, ahol az ágakban az egyensúlyi helyzettől való kitérés x. Jelöljük a csőben lévő folyadék tömegét M-mel!

Bontsuk fel képzeletben a folyadékot két részre, a jobb ágban levő $2x$ hosszú, $m_1 = 2xM/L$ tömegű, és az alsó „U" alakú, $L - 2x$ hosszú, $m_2 = (L - 2x) \cdot M/L$ tömegű részre. A két rész között K kényszererő hat. Vegyük észre, hogy oly módon vágtuk el a vízoszlopot, hogy az alsó rész nyugalomban lenne, ha nem lenne K.



1. ábra. Az „U" csőben a folyadék *a*) egyensúlyból kitérítve, *b*) gyorsuló rendszerben egyensúlyban, *c*) gyorsuló rendszerben egyensúlyból kitérítve

A K kényszererővel felírhatóak az alábbi mozgásegyenletek:

$$m_2(-a) = K \ , \tag{1}$$

$$m_1(-a) = m_1 g - K \ . \tag{2}$$

K-t eliminálva:

$$(m_1 + m_2)(-a) = m_1 g \ ,$$

$$M(-a) = 2x\frac{M}{L}g \ ,$$

$$a = -\frac{2g}{L}x \ . \tag{3}$$

A gyorsulás egyenesen arányos a kitéréssel, és azzal ellentétes írányú, így tudható, hogy a víz harmonikus rezgőmozgát végez. Harmonikus rezgőmozgás esetén: $a(t) = -\omega_0^2 \cdot x(t)$, így a periodikus mozgás körfrekvenciája:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}} \ . \tag{4}$$

(b) feladatrész

A gyorsuló rendszert leírhatjuk egy benne elhelyezett, a gyorsuló rendszerrel együtt haladó, ahhoz képest álló megfigyelő rendszeréből – amely így már nem inerciarendszer –, és ekkor be kell vezetni a megfelelő tehetetlenségi erőket. A gravitációs erőt kiegészítve ezzel a tehetetlenségi erővel, felveszünk egy effektív gravitációs gyorsulást, melynek nagysága: $g_{\text{eff}} = \sqrt{a^2 + g^2}$, irányát az 1.b ábra mutatja. Az effektív gravitációs erő merőleges a kialakuló vízfelszínre.

Ekkor a vízfelszín α szöget zár be a „vízszintes" x tengellyel, amire $\tan\alpha = a/g$ az 1.b ábra szerint, továbbá $\tan\alpha = 2x/s$, így $x = sa/(2g) = 2$ cm.

(c) feladatrész

Az (a) feladatrészhez hasonlóan gondolatban bontsuk két részre a folyadékot az 1.c ábra szerint. A folyadékok között ható erőt jelöljük K-val. K csak függőleges lehet, mivel nyíró irányú erőt nem adhatnak át a folyadékrétegek (idális folyadék esetén).

Vegyük észre, hogy ebben az esetben a mozgásegyenletek azonosak lesznek az (a) részfeladatban felírtakkal! Így a körfrekvencia is megegyezik:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{2g}{L}}\ . \tag{5}$$

Megjegyzés: Felmerülhet a kérdés, hogy mi történik az effektív gyorsulás vízszintes irányú komponense által kiváltott erővel? Ennek az erőnek a cső fala tart ellen. Ezt legkönyebb a felső $2x$ hosszúságú szakaszon belátni. A függőleges irányú erők: (1) a K kényszererő (2) a gravitációs erő mg. A vízszintes erők: (1) a tehetetlenségi erő ma, (2) a cső fala által kifejtett támasztó erő. A víztömb csak függőlegesen tud gyorsulni, így a vízszintes irányú erők kiegyenlítik egymást.

2. Feladat

(a) feladatrész

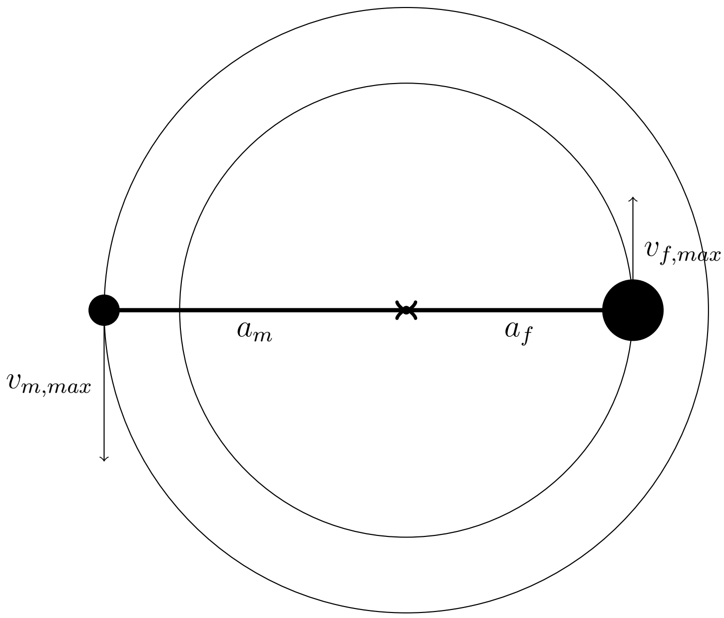
A maximális radiális sebesség megegyezik a pályamenti sebességgel.

Mivel a főkomponens sebessége kisebb, mint a mellékkomponensé, és periódusidejük (P) mindenképp megegyezik, a főkomponens kisebb sugarú pályán kering, mint a mellékkomponens (azaz a tömege nagyobb). A körmozgásból adódóan tehát, mindkét komponensre (a a pályasugár):

$$\omega = \frac{2\,\pi}{P} = \frac{v}{a}, \text{ tehát } a = \frac{v\,P}{2\,\pi}\ .$$

Ezt alkalmazva a fő- illetve mellékkomponensre:

$$a_f = \frac{v_f\,P}{2\,\pi} = \frac{30000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (30 \cdot 24 \cdot 3600)\mathrm{s}}{2\,\pi} = 1{,}24 \cdot 10^{10}\mathrm{m}\ ,$$
$$a_m = \frac{v_m\,P}{2\,\pi} = \frac{40000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (30 \cdot 24 \cdot 3600)\mathrm{s}}{2\,\pi} = 1{,}65 \cdot 10^{10}\mathrm{m}\ .$$



2. ábra

(b) feladatrész

Az egyensúly érdekében a csillagok egymásra kifejtett gravitációs vonzóereje biztosítja a centripetális gyorsuláshoz szükséges erőt:

$$\frac{Gm_f m_m}{(a_f+a_m)^2} = \frac{m_f v_f^2}{a_f} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{Gm_m m_f}{(a_m+a_f)^2} = \frac{m_m v_m^2}{a_m}.$$

Vezessük be az $a = a_f + a_m$ jelölést. Ekkor

$$m_m = \frac{v_f^2\, a^2}{a_f G} = \frac{30000^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,(2{,}89\cdot 10^{10})^2\mathrm{m}^2}{1{,}24\cdot 10^{10}\mathrm{m}\ 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}} = 9{,}09\cdot 10^{29}\mathrm{kg}\ ,$$

$$m_f = \frac{v_m^2\, a^2}{a_m G} = \frac{40000^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,(2{,}89\cdot 10^{10})^2\mathrm{m}^2}{1{,}65\cdot 10^{10}\mathrm{m}\ 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}} = 1{,}21\cdot 10^{30}\mathrm{kg}.$$

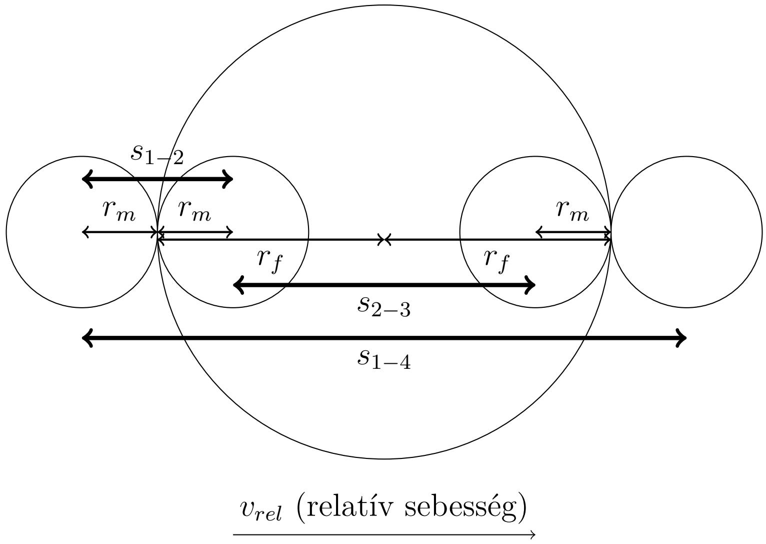
(c) feladatrész

Tekintsük a 3. ábrát!

A feladat szövege szerint $t_{1-4} = 8^h 0^m$ és $t_{2-3} = 1^h 18^m$. A látszó relatív sebesség a két kerületi sebesség összege: $v_{\mathrm{rel}} = v_f + v_m = 70\mathrm{km/s}$. Másrészt, a 3 ábra alapján $s_{1-4} = 2r_f + 2r_m$ és $s_{2-3} = 2r_f - 2r_m$.

A fedés rövid ideje során tekinthetjük a mozgást egyenes vonalú egyenletes mozgásnak, tehát

$$s_{1-4} = 2r_f + 2r_m = v_{\mathrm{rel}} * t_{1-4}\ ,$$
$$s_{2-3} = 2r_f - 2r_m = v_{\mathrm{rel}} * t_{2-3}.$$



3. ábra

E két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{2r_f + 2r_m}{2r_f - 2r_m} = \frac{r_f + r_m}{r_f - r_m} = \frac{t_{1-4}}{t_{2-3}}.$$

Ezt átrendezve,

$$\left(1 + \frac{t_{1-4}}{t_{2-3}}\right) r_m = \left(\frac{t_{1-4}}{t_{2-3}} - 1\right) r_f \text{ tehát } \frac{r_f}{r_m} = \frac{1 + \frac{t_{1-4}}{t_{2-3}}}{\frac{t_{1-4}}{t_{2-3}} - 1} = 1{,}39.$$

Ebből kapjuk, hogy $s_{1-4} = 2r_f + 2r_m = 2{,}78r_m + 2r_m = 4{,}78r_m = v_{rel} * t_{1-4}$, amiből végül

$$r_m = \frac{70000\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 8 \times 3600\,\mathrm{s}}{4{,}78} = 4{,}22 \cdot 10^8\mathrm{m}\,, \qquad r_f = 1{,}39 r_m = 5{,}87 \cdot 10^8\mathrm{m}.$$

3. Feladat

(a) feladatrész

Vizsgáljuk meg a kompresszibilitást elsőként izoterm folyamatra! Ehhez tekintsük az állapotegyenlet kicsiny megváltozását:

$$\Delta\,(pV) = \Delta\,(nRT)\,.$$

A jobb oldal nulla, mivel izoterm állapotváltozásról van szó, a bal oldalon álló szorzatból pedig bármelyik tag változhat, így:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) - pV \approx pV + p\Delta V + V\Delta p - pV = 0,$$

ahol az infinitezimálisan kicsi mennyiségek $\Delta p \Delta V$ szorzatát elhanyagoltuk. Tovább alakítva:

$$p\Delta V + V\Delta p = 0;$$
$$\frac{\Delta V}{V\Delta p} = -\frac{1}{p}.$$

Ez alapján a kompresszibilitás izoterm folyamatra:

$$\beta_T = \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Adiabatikus esetben az első főtételt alkalmazzuk:

$$\frac{f}{2} nR\Delta T = -p\Delta V.$$

Az állapotegyenletet is felhasználva:

$$\frac{f}{2} nR\Delta\left(\frac{pV}{nR}\right) = -p\Delta V;$$
$$\frac{f}{2}\Delta\left(pV\right) = -p\Delta V.$$

A bal oldalon álló kifejezést az izoterm eset alapján már ismerjük, így:

$$\frac{f}{2}\left(p\Delta V + V\Delta p\right) = -p\Delta V$$
$$\left(1 + \frac{f}{2}\right) p\Delta V = -\frac{f}{2} V\Delta p$$
$$\frac{\Delta V}{V\Delta p} = -\frac{f}{f+2}\cdot\frac{1}{p}.$$

Végül a kompresszibilitás adiabatikus folyamatra:

$$\beta_S = \frac{f}{f+2}\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{\kappa p}, \tag{7}$$

ahol κ az adiabatikus kitevő.

(b) feladatrész

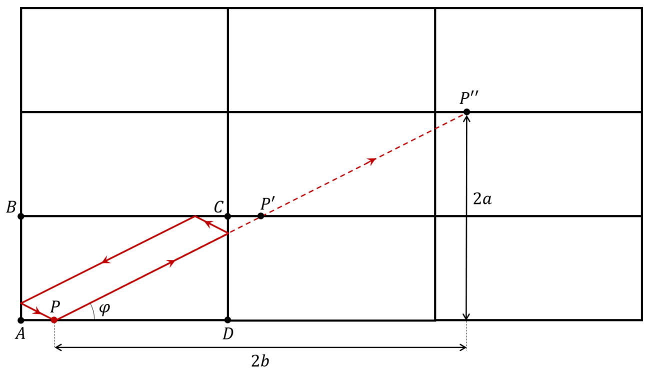
Az előző feladatrészben láthattuk, hogy, mivel $f \geq 3$ bármely gáz esetére, az adiabatikus kompresszibilitás mindig kisebb, mint az izoterm. A hanghullámokat részecskék periodikus rezgésének tovaterjedése okozza, ebből következően a nagy frekvenciás, gyors rezgések tekinthetők adiabatikus állapotváltozásnak, míg az alacsony frekvenciás, lassú rezgések izotermnek. A feladat szövege alapján a hang terjedési sebessége $-1/2$-dik hatványban arányos a kompresszibilitással, így nagy frekvenciájú, adiabatikus hullám terjedési sebessége nagyobb, mint a kis frekvenciájúé. Vagyis a magas hangok terjednek gyorsabban!

Megjegyzés: Mindez nem összetévesztendő azzal az ismert tapasztalatunkkal, hogy a mély hang messzebbre jut! Ez utóbbi jelenség oka, hogy a nagy frekvenciájú hangok amplitúdója térben gyorsabban csillapodik, ezáltal előbb válnak az emberi fül számára érzékelhetetlenné.

4. Feladat

(a) feladatrész

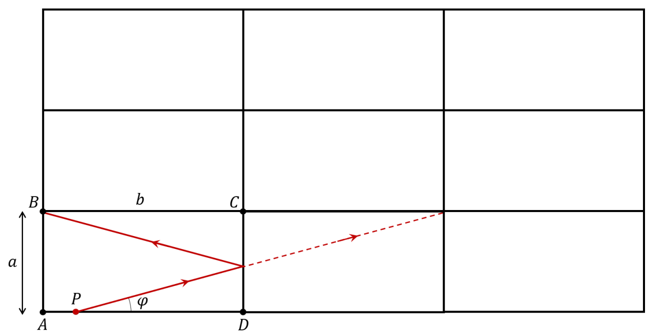
Készítsünk az eredeti $ABCD$ téglalap mellé egy téglalap-rácshálózatot! Az ábra a rács egy véges darabját mutatja, amely végtelenül folytatódik felfele, és jobbra. A fénysugár $ABCD$ téglalapon belüli útja leképezhető a rácshálón való egyenes útra (4. ábra).



4. ábra. Fényút kiegyenesítése

Az ábrán szaggatott vonallal jelölt, $ABCD$ téglalapból kilépő sugarat nevezzük *képzetes sugárnak*. Amikor a hálózat egyik téglalapjából a másikba lép a képzetes sugár, az megfeleltethető az $ABCD$ téglalapban egy visszaverődésnek. A fénysugár akkor verődik vissza P-be, ha a képzetes fénysugár eltalál egy P-nek megfelelő P' pontot a hálózatban. Ez a P' pont az eredeti téglalapban a P pont téglalap középpontjára vett tükrözöttjének felel meg. A P pontba való visszaérésnek tehát az felel meg amikor a képzetes sugár eléri a második neki megfelelő P" pontot. Láthatjuk, hogy P' függőleges, illetve vízszintes távolsága P-től pozitív egész számszorosa a-nak, illetve b-nek. Megoldást adó szögekre így teljesük: $\tan\varphi = \frac{n \cdot a}{k \cdot b}$ $(n, k \in Z^+)$.

Ezen kívül van egy másik módja is a fény P-be való visszajutásának. Ekkor a derékszögű sarok a beeső sugarat párhuzamosan veri vissza (macskaszem). Ez akkor is igaz, ha a fénysugár éppen a sarokba verődik. Mivel a fénysugárnak, van valamekkora átmérője, így egy tökéletesen derékszögű sarokból párhuzamosan verődik vissza a nyaláb.



5. ábra. Sarokból visszaverődő fénysugár

Ez utóbbi esetben akkor verődik vissza a sugár P-be ha a képzetes sugár eltalálja a rács valamelyik sarkát. Ekkor P függőleges távolsága az illető saroktól változatlanul a-szor egész szám. Vízszintes távolsága b-szer egész szám mínusz a d hossz. Sarokból való visszaverődére tehát: $\tan\varphi = \frac{n\cdot a}{k\cdot b-d}$, $(n, k \in Z^+)$

(b) feladatrész

Az előző feladatrész alapján minden φ irány jó, aminek tangense pozitív racionális szám.

(c) feladatrész

Először vizsgáljuk azt, hogy érkezhet-e a fény valamely sarokba! Ha igen, akkor léteznie kell olyan n és k pozitív egész számoknak amire: $\tan\varphi = 1 = \frac{n\cdot 38}{k\cdot 56-1}$, Mivel a nevező páratlan, a számláló pedig páros, így a tört nem lehet 1, tehát nem a sarokból verődik vissza a fény.

A $\tan\varphi = 1 = \frac{n\cdot 38}{k\cdot 56}$ egyenletet kielégítő legkisebb pozitív egészek: $n = 28$, $k = 19$. Ez azt jelenti, hogy a képzetes sugár P'-be jutásáig 19-szer metszi a függőleges rácsvonalakat és 28-szer a vízszinteseket, a P'-ből P”-be jutásig pedig még ugyanennyiszer. Függőleges rácsvonalon való áthaladás a oldalról való visszaverődésnek, vízszintes falon való áthaladás pedig b oldalról való visszaverődésnek felel meg, a szemközti falakon pedig megegyező számú visszaverődés történik. Következésképpen az AB és CD falakról 19-19, az AD és BC falakról 28-28 visszaverődés történik P-be való visszajutásig.

5. Feladat

(a) feladatrész

Az állítással ekvivalens, ha azt bizonyítjuk, hogy a mágneses tér felületre merőleges komponense a határon nulla! Ehhez használjuk fel Gauss mágneses törvényét:

$$\sum_{z.f.} \boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A} = 0\ . \tag{8}$$

Az egyenlet bal oldala valamilyen zárt felületre értelmezett. Ehhez vegyünk fel egy hengert, amelynek tengelye merőleges a felületre. A henger alapjait kezdjük el közelíteni egymáshoz úgy, hogy a határfelület végig köztük maradjon! Ekkor határesetben a hengerpalást eltűnik, a bal oldalnak ott nem lehet járuléka. Mivel a szupravezető belsejében a mágneses indukcióvektor nulla, a bal oldalt egyedül a külső mágneses tér merőleges komponense határozza meg:

$$B_\perp A = 0.$$

Innen látható, hogy a mágneses indukcióvektor felületre merőleges komponense kívül nulla kell legyen.

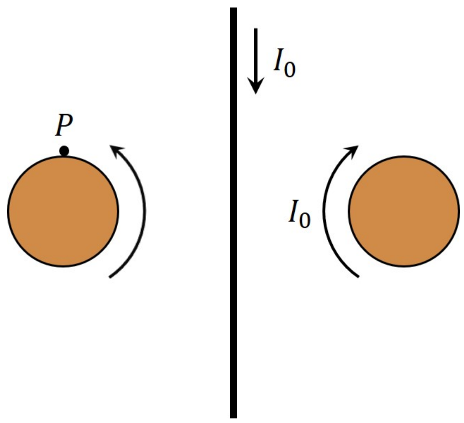
(b) feladatrész

Vegyünk fel egy zárt kontúrt a tórusz középkörén, és alkalmazzuk az Ampère-féle gerjesztési törvényt:

$$\sum_{z.g.} \boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{r} = \mu_0 \sum I. \tag{9}$$

Mivel a mágneses indukcióvektor a szupravezetőben mindenütt nulla ($\boldsymbol{B}_{bent} = 0$), az egyenlet bal oldala nullát ad. Emiatt az egyenlőség értelmében a zárt görbére illeszthető zsákfelületeket átdöfő áramok előjeles összegének is nullának kell lennie. Ez utóbbi a vezetékben és a szupravezetőben folyó áramokat jelenti, vagyis a tóruszban éppen $I = I_0$ áram folyik, az 6. ábrán jelölt irányban.

Megemlítendő továbbá, hogy a hengerszimmetriából adódóan a felületi áramok eloszlása egy a vezetékkel koncentrikus kör mentén egyenletes!



6. ábra

(c) feladatrész

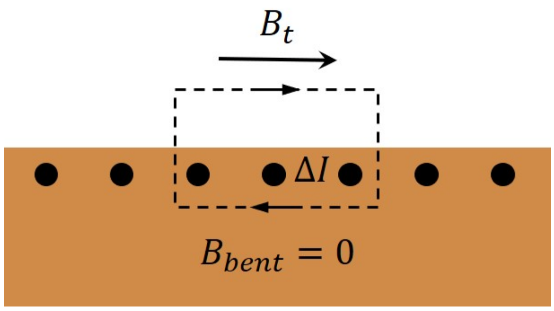
Először is vegyük észre, hogy az **a**) feladatrészben bizonyított állítás értelmében, a mágneses indukcióvektornak a tórusz felületén az arra merőleges, vagyis a vezetékkel egyirányú komponense nulla:

$$B_z = 0. \tag{10}$$

A tangenciális komponens kiszámításához ismét a (9) gerjesztési törvényt hívhatjuk segítségül. Vegyünk fel egy kicsiny téglalap alakú zárt görbét a P pont körül, úgy hogy annak párhuzamos oldalai tangenciális illetve a felületre merőleges irányúak legyenek (7. ábra).

A mágneses térnek egyedül a tóruszon kívüli, felülettel párhuzamos élen van járuléka: $B_t\Delta a$, ahol Δa a kicsiny téglalap oldalhossza. Mivel a tóruszban folyó I_0 áram egyenletesen oszlik el, a körülzárt áram itt: $\Delta I = I_0\frac{\Delta a}{2R_k\pi}$. A gerjesztési törvény alapján tehát a mágneses tér tangenciális komponense:

$$B_t = \frac{\mu_0 I_0}{2R_k\pi}. \tag{11}$$



7. ábra

A radiális irányú komponens is meghatározható, ha az előző módszerben vett téglalapot a vezetékkel párhuzamos tengely körül 90°-kal elforgatjuk. Mivel egy ilyen hurok áramot nem fog közre, ez a komponens nulla:

$$B_r = 0. \tag{12}$$

Összességében tehát a P pontbeli mágneses tér a (9), (10) és (11) egyenletek szerint:

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 I_0}{2 R_k \pi} \boldsymbol{e}_t, \tag{13}$$

ahol $\boldsymbol{e}_t$ a tangenciális irányú, a 6. ábra síkjából kifelé mutató egységvektor.

Ez éppen a vezeték által a P pontban keltett mágneses térrel egyenlő, vagyis a szupravezetőn folyó áramoknak csupán a tóruszon belül van járuléka.

Megjegyzés: Ezt a közel sem triviális eredményt a mágneses teret érintő mélyebb ismeretek segítégével is meghatározhatjuk. Ha ugyanis tudjuk, hogy a mágneses indukcióvektor úgynevezett *axiálvektor*, akkor fenti elrendezés hengerszimmetriájából azonnal következik, hogy az indukcióvonalak kör alakúak! Ezt felhasználva pedig az Ampère-féle gerjesztési törvény segítségével már könnyen megadható a P pontbeli mágneses indukcióvektor. Az említett állítás bizonyítása megtalálható a 2014. évi Eötvös-verseny 3. feladatának megoldásában, ez az alábbi linken tekinthető meg: http://fizikaiszemle.hu/old/archivum/fsz1501/TichyG_VankoP_VighM.pdf