Döntő: 2019. február 2.

Fizika feladatsor

XII. Dürer Verseny

F kategória

Gravitációs gyorsulás mérése U alakú gumicsővel

A mérési jegyzőkönyv

A mérési forduló során egy jegyzőkönyvet kell készítenetek, amelyben leírjátok

- a mérési elrendezésetek lényegi elemeit,
- a mérési módszereiteket,
- az összes mérési eredményeteket,
- a módszereteket, hogy ebből hogyan számoltátok a kért mennyiségeket,
- hogy a mérési módszerek és eredmények alapján a mért mennyiségeknek mekkora az abszolút vagy relatív hibája!

A jegyzőkönyvet úgy kell elkészíteni, hogy az alapján mások, akár évekkel később is megismételhessék a mérést, és reprodukálhassák a mérési eredményeiteket, illetve az általatok megadott számolás menetét felhasználva megkönnyítsétek a dolgukat a kért mennyiségek kiszámolásában.

A feladat szövegezése és vezetése olyan, hogy megkönnyítse a munkátokat a jegyzőkönyv elkészítésében, de a jegyzőkönyvnek önmagában, a feladatsor ismerete nélkül is teljesnek kell lennie.

Törekedjetek a tömör, velős fogalmazásra!

A mérés célja

A mérési fordulóban a gravitációs gyorsulás értékét kell megmérnetek az alapján, hogy egy „U” alakú gumicsőben az egyensúlyi helyzetéből kitérített folyadékoszlop hogyan mozog.

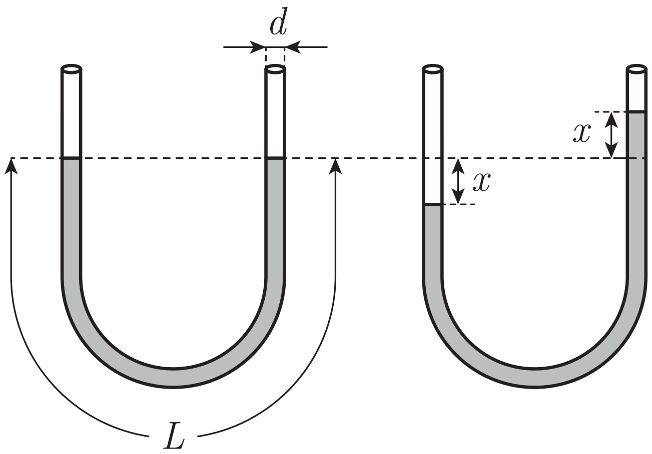
A mérési feladat elmélete

Ha egy függőleges szárú „U” alakú csőben a folyadékot kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, akkor a vízoszlop magasságára egy

$$m \cdot a + 2m\beta \cdot v + D \cdot x = 0 \tag{1}$$

alakú egyenletet lehet felírni, ahol m a folyadék teljes tömege, β egy együttható, ami a súrlódásért felel (értéke független a gyorsulástól, sebességtől és kitéréstől, de függ pl. a cső alakjától, a folyadék és a cső anyagi minőségétől), D pedig egy effektív rugóállandó, ami azt adja meg, hogy hogyan függ az erő a folyadékoszlop egyensúlytól vett kitérésének értékétől. A mi esetünkben elég kicsi sebességek vannak ahhoz, hogy a sebességben másodrendű fékezőerőt elhanyagoljuk.

Milyen $x(t)$ függvényre teljesül az 1. egyenlet? Középiskolában megtanulhattátok, hogy $\beta = 0$ esetén az $x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ alakú megoldások lesznek jók, ahol $\omega = \sqrt{D/m}$, az idő kezdőpillanatát pedig úgy választottuk meg, hogy a kezdetben a kitérés maximális legyen.



1. ábra. A mérési elrendezés. A vízoszlop magassága x-szel tér ki az egyensúlyi helyzethez képest egy adott pillanatban. Ekkor a vízoszlop felső pontjának a sebessége vagy a gyorsulása nem 0, és az egyensúlyi helyzet felé mutat a gyorsulás.

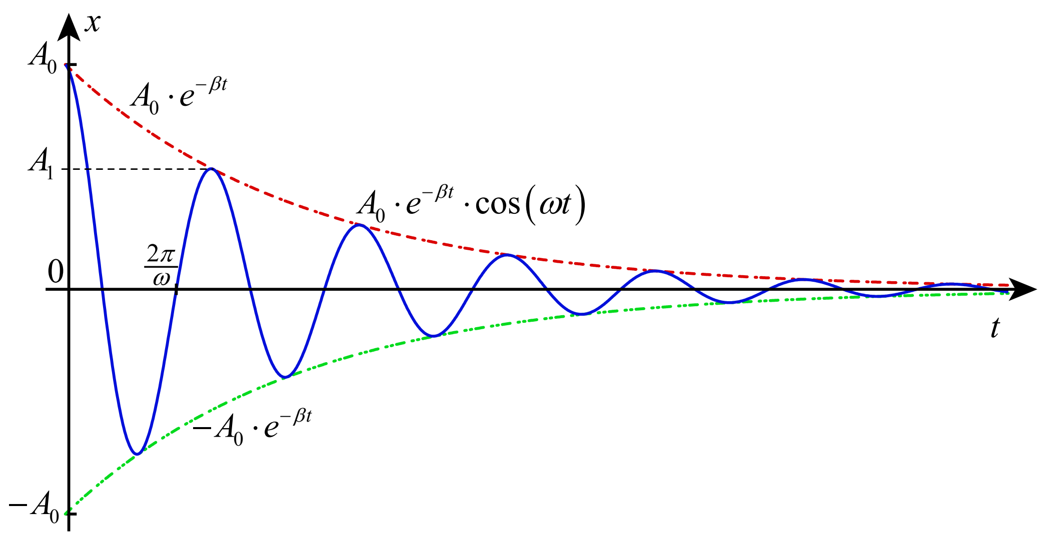
Amennyiben viszont $\beta \neq 0$, a megoldást csak felsőbb matematikai eszközökkel számíthatjuk ki. A megoldás ekkor

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

alakú lesz, ahol A_0 a kezdeti amplitúdó, β a már említett csillapítási tényező, ω pedig egy effektív körfrekvencia,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Ebben ω_0 a csillapítatlan ($\beta = 0$) rezgés körfrekvenciája. Az 1. ábra szerinti elrendezésben $\omega_0 = \sqrt{2g/L}$.



2. ábra. Az $x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t)$ függvény (folytonos vonal), valamint az $A_0 e^{-\beta t}$ és $-A_0 e^{-\beta t}$ burkolófüggvények (szaggatott vonalak) ábrázolása. Az ábrán $\beta/\omega = 0{,}1$.

1. feladat (elmélet)

1. Milyen ismert mozgásegzenletre vezet a $\beta = 0$ eset?

2. Ismerve a β/ω hányadost, mekkora részére csökken a lokális maximális kitérés, miközben a szögfüggvény fázisa (azaz ωt) 2π-nyit változik? Ugyanannyiad részére csökken 0-ról 2π-re, mint 2π-ről 4π-re?

Mérési feladatok

Az asztalon egy Bunsen állványokra rögzített „U” alakú csövet találtok. Hozzátok csillapított rezgőmozgásba a vizet!

2. feladat

Milyen módszerrel hoztátok rezgésbe a vizet? Határozzátok meg a rezgés T (effektív) periódusidejét és ΔT abszolút hibáját! Ebből számoljátok ki az ω (effektív) körfrekvencia értékét és annak abszolút hibáját!

A mérés során vegyétek úgy, hogy a kitérések lokális szélsőértéke ott van, ahol $\cos(\omega t)$-nek. Vagyis a kitérések lokális maximumából közvetlenül mérhető az (effektív) periódusidő.

3. feladat

T ismeretében, valamint a kitérések maximumának méréséből határozzátok meg a β csillapítási tényezőt és annak $\Delta\beta$ abszolút hibáját!

4. feladat

a) Az elméleti leírás segítségével fejezzétek ki a gravitációs gyorsulás értékét a rendszerre megadott, és a mérés alapján kimérhető paraméterek segítségével!

b) Mennyi a gravitációs gyorsulás mért értéke, és mekkora a hibája?

Hibaszámítás

Egy A mennyiséget többször mérve, a kapott $A_1, A_2, \ldots$ számok számtani közepét tekintsük A értékének, és A mennyiség ΔA abszolút hibáját vegyük akkorának, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ számokat lefedje.

Nagy számú mérési eredmények esetén gyakran jó közelítés, ha ΔA-t az A_i számok szórásának vesszük.

Előfordulhat, hogy olyan mennyiség hibájára vagyunk kíváncsiak, amit közvetlenül nem mérhetünk, hanem más mennyiségekből számolhatunk. Legyen F egy ilyen mennyiség, ami függ az A és B mért mennyiségektől: $F(A, B)$. Ezen A és B mennyiségek abszolút hibája legyen ismert, rendre ΔA és ΔB!

- *Összeg:* Ha $F = c_A \cdot A + c_B \cdot B$ alakú, ahol c_A és c_B konstansok, akkor
$$\Delta F = c_A \cdot \Delta A + c_B \cdot \Delta B.$$
- *Szorzat:* Ha $F = c_{AB} \cdot A^m \cdot B^n$ alakú, ahol c_{AB}, m és n konstansok, akkor a relatív hiba,
$$\delta F := \frac{\Delta F}{F} = m\frac{\Delta A}{A} + n\frac{\Delta B}{B} = m \cdot \delta A + n \cdot \delta B.$$

Tömören: összeadás vagy kivonás esetén az abszolút hiba adódik össze, szorzás és osztás esetén pedig a relatív hiba. Ha ennél bonyolultabb mennyiség hibáját szeretnénk meghatározni (pl. logaritmus), akkor jó módszer, ha kiszámoljuk F mennyiség lehetséges maximális és minimális értékeit, és vesszük ezek eltérését $F(A, B)$-től. Ekkor F mennyiség hibájának a nagyobbik eltérést vehetjük.

Példa: az $F = \sin(A)$ mennyiség abszolút hibája ezzel a módszerrel $|\sin(A + \Delta A) - \sin(A)|$ és $|\sin(A - \Delta A) - \sin(A)|$ közül a nagyobbik.

A mérések elvégzésére és a jegyzőkönyv megírására 90 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők