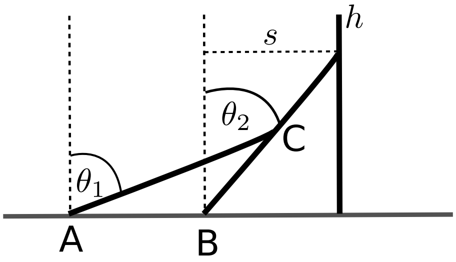
1. feladat



(a) Jelöljük az első, illetve mősodik dominónak a függőlegessel bezárt szögét θ_1-el, illetve θ_2-vel, a fenti ábrának megfelelően. Első lépésként megállapíthatjuk, hogy a második dominó dőlésszöge a keresett pillanatban

$$\sin\theta_2 = \frac{s}{h}. \tag{1}$$

Továbbá az ábrán ABC-vel jelölt háromszögre a szinusztételt felírva kapjuk, hogy

$$h\sin(\theta_1 - \theta_2) = s\cos\theta_2. \tag{2}$$

Vezessük be a továbbiakban a $p = s/h$ jelölést a dominók távoságának és magasságának hányadosára (értelemszerűen $p < 1$). Felhasználva az (1) egyenletet, a (a) egyenlet így írható:

$$\sqrt{1-p^2}\sin\theta_1 - p\cos\theta_1 = p\sqrt{1-p^2}. \tag{3}$$

Négyzetre emelve, és kihasznáva, hogy $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk $\sin\theta$-ra:

$$\sin^2\theta - 2p\sqrt{1-p^2}\sin\theta - p^4 = 0, \tag{4}$$

amelynek a feladat szempontjából releváns megoldása

$$\sin\theta = p\left[(1-p^2) + \sqrt{(1-p^2)^2 + p^2}\right]. \tag{5}$$

(b) tekintsünk egy dominót valahol a sor közepén. A dominó, miután eléri őt a dőlési sor, a talppontja körül forgást végez. Jelöljük ennek szögsebességét ω_0-al közvetlenül azután, hogy a vizsgált dominót megüti az őt megelőző dominó, és ω_1-el közvetlenül azelőtt, hogy ő megütni a rá következő dominót. Mivel a szögsebesség arányos a perdülettel, így miután a dominósor haladási sebessége állandósult, teljesül a

$$\omega_0 = X\omega_1 \tag{6}$$

feltétel. Ezen felül, az energiamegmaradás értelmében

$$\frac{1}{2}\Theta(\omega_1^2 - \omega_0^2) = \frac{mg}{2}\left(h - \sqrt{h^2 - s^2}\right), \tag{7}$$

ahol m a dominó tömege, $\theta = mh^2/3$ pedig a tehetetlenségi nyomatéka. A fenti egyenlet jobb oldala a tömegközéppont lefelé mozdulásából származó helyzeti energiaváltozás, ez alakul át forgási energiává. Felhasználva a (6) egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\omega_1^2 = \frac{3g}{1-X^2}\frac{1-\cos\theta_2}{h}, \tag{8}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sqrt{1-s^2/h^2} = \cos\theta_2$, ahogyan azt az előző feladatrészben láttuk.

A dominó tejetének vízszines irányú sebessége az őt ért lökés után közvetlenül $v_{0x} = h\omega_0$, a következő ütközés előtt közvetlenül pedig $v_{1x} = h\cos\theta_2\omega_1$. Közelítésképpen tekinthetjük úgy, hogy a dominósor haladási sebessége e két sebesség átlaga, vagyis

$$v_{\text{átl}} = \frac{v_{0x}+v_{1x}}{2} = \frac{h}{2}\omega_1(X+\cos\theta_2) = \frac{1}{2}(X+\cos\theta_2)\sqrt{3gh\frac{1-\cos\theta_2}{1-X^2}} \tag{9}$$

2. feladat

(a) Az első feladatrész megoldásához legegyszerűbben úgy jutunk, ha kiszámoljuk a kiáramló gáz által végzett munkát a zsilipajtón.

$$Fx = p_0Ax = \frac{mv^2}{2} \tag{10}$$

$$s_2 = vt = \sqrt{\frac{2p_0Ax}{m}}t = \sqrt{\frac{2\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot 3\ \text{m}^2\cdot 0.3\ \text{m}}{200\ \text{kg}}}300\ \text{s} = 9\ \text{km} \tag{11}$$

(b) Mutasson az x tengely az űrnaszádtól kifelé merőlegesen. Az x irányú sebességek eloszlása

$$f(v_z) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \tag{12}$$

.

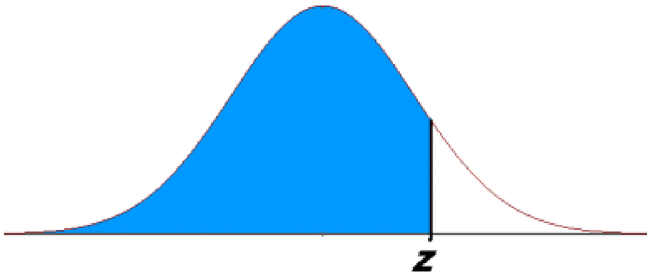
A normális eloszlást általában a

$$P(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{13}$$

alakban szokták megadni, ahol μ az átlaga σ pedig a szórása. A

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{14}$$

átalakítással az eloszlás standardizálható a $\mu = 0$, $\sigma = 1$ normális eloszlásra. A feladat megoldásához azt kell kiszámolnunk, hogy v_z értéknél lesznek lassabbak a molekulák 99%-a.



Ehhez a rendelkezésünkre állnak táblázatok, amelyekből kiolvasható, hogy a standardizált $P(z)$ eloszlás mely z értékhez tartozik a 0.99, amely $z = 2.326$ (a táblázatban nem feltétlenül fogunk pontosan 0.99-hez értéket találni, akkor használjuk a legközelebbit).

Azonosítsuk μ-t és σ-t, hogy megkaphassuk a keresett sebességet! A sebesség átlaga $\mu = 0$, hiszen különben nem lenne a gáz egésze nyugalomban.

Tehát

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2 2\pi}} \rightarrow \sigma^2 = \frac{kT}{m}, \tag{15}$$

amiből következik, hogy a keresett távolság

$$s_1 = v_x t = z\sqrt{\frac{kT}{m}}t \tag{16}$$

Az űrhajó atmoszférája a földihez hasonló, akkor elsősorban oxigénből és nitrogénből áll. Ezen két gázra számolva $s_1^{\mathrm{O}_2} = 2026$ m, illetve $s_1^{\mathrm{N}_2} = 2166$ m.

3. feladat

a. Aktivitásból felezési időt számolhatunk a bomlási törvény segítségével:

$$A_t = A_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \tag{17}$$

$$T_{1/2} = \frac{t}{\log_2\left(\frac{A_0}{A_t}\right)} \tag{18}$$

Ahol A_0 a kezdeti, A_t a végső aktivitás, a kettő között elkelt idő pedig t.

Bármely két aktivitásból számolunk felezési időt különböző eredményt kapunk, mivel a mérési adataink mérési hibával terheltek. A szisztematikus hibát úgy kerülehtjük el, hogy egymással át nem fedő időablakok eredményeit használjuk.[1] A felhasznált mérések sorszámai, és az abból számolt felezési idők:

[1]Képzeljük el, hogy A_0-nak mindig az 1. mérést használnánk, és csak A_t-t változtatnánk. Ekkor ha A_0-t pontatlanul mértük (pl. többnek), akkor ha a többi aktivitást pontosan mértük is az összes számolt felezési időnk szisztematikusan kisebb lesz.

mérések sorszáma	t [h]	$T_{1/2}$ [h]
1. & 2.	2	5,883
2. & 3.	4	7,227
3. & 4.	6	4,789

Ezekből számolt felezési idő átlaga: $\overline{T_{1/2}} = 5,966$ h, a minta szórása 1,22 h. Tehát a felezési időre a $T_{1/2,A} = 5,97 \pm 1,22$ h választ adhatjuk. Ebből a kezdeti bomló atomok száma meghatározható: $N_0 = \frac{A_0 \ln(2)}{T_{1/2}} = 8660$ képletből. Az atom szám relatív hibája is 20%.

b. A B anyag nagyon rövid felezési idővel rendelkezik, így képzelhetjük úgy, hogy az A elbomlik B-vé, és az szinte azonnal X-é. Tehát egy beállt egyensúly esetén pontosan annyi B anyag keletkezik, mint amennyi elbomlik. Mivel B rövid felezési idővel rendelkezik, azért az egyensúly hamar beáll. Ez alapján az aktivitás fele származik az A anyag bomlásából, míg a másik fele a B anyag bomlásából származik. A felezési időhöz az aktivitások arányát használtuk, ami nem változik az új információ fényében sem. Tehát a felezési időre marad a korábbi becslésünk. A bomló atomok számában viszont direkt használtuk az aktivitást. Az A anyag aktivitásának felére csökkenéséből a kezdeti atomszámra adott becslésünk is felére esik azaz $N_0 = 4330$ lesz 20%-os relatív hibával.

4. feladat

Mialatt a töltések a doboz széleire vándorolnak, az általuk érzett elektromos tér folytonosan csökken a kezdeti E értékről a végső $0,99E$ értékre. Ennek megfelelően tekinthetjül úgy, mintha a töltések egy átlagos $E' = 0,5(1 + 0,99)E = 0,995E$ erősségű térben mozognának. Mivel kezdetben a töltéseloszlás egyenletes, így a pozitív töltéseken végzett munka megegyezik a negatív töltéseken végzett munkával, a teljes munkavégzés tehát a pozitív töltéseken végzett munka kétszerese. Vegyük fel koordinátarendszerünket úgy, hogy az x tengely feleljen meg az elektromos tér irányának és tekintsük azokat a pozitív töltéseket, amelyek az $l < x < l + \Delta l$ sávban vannak, valamilyen l távolság esetén. Ebben a sávban $Q\Delta l/L$ pozitív töltés van, a rajtuk végzett munka

$$W_+(l) = \frac{Q}{L} E' l \Delta l. \tag{19}$$

Az ugyanezen sávban lévő negatív töltéseken végzett munka viszont

$$W_-(l) = \frac{Q}{L} E'(L - l)\Delta l, \tag{20}$$

így tehát a teljes munkavégzés $W(l) = W_+(l) + W_-(l) = QE'\Delta l$ független l-től. Következésképpen könnyen összegezhetjük az egyes sávokra vett munkavégzéseket és azt kapjuk, hogy az elektromos tér által végzett teljes munka

$$W = QE'L \tag{21}$$

Q és L értéke ismert, így már csak E'-t, pontosabban az eredeti külső E térerrőséget kell meghatároznunk. Ehhez vegyük figyelembe, hogy miután a töltések elmozdultak, a doboz egy síkkondenzátorhoz hasonlatos: a két szélen felhalmozódott töltések egy homogén belső teret hoznak létre. Ez tekinthető a két, homogén töltésű sík tereinek összegeként. A téreréssőg a felületi töltéssűrűséggel arányos, számszerű értéke

$$E_{\text{töltések}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}. \tag{22}$$

Ez a tér csökkenti a kezdeti külső teret annak 99%-ára, tehát

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 A} = 0,01E \rightarrow E = \frac{100Q}{\varepsilon_0 A}. \tag{23}$$

A teljes munkavégzés tehát

$$W = QL0,995E = \frac{99,5Q^2L}{\varepsilon_0 A} \approx 2,8 \cdot 10^{12} \text{ J}. \tag{24}$$

5. feladat

A fázistér meghatározásában a megmaradó mennyiségek segítenek:

a. A labda az $x_0 = 0$ pontból indul és állandó $v_x = v_{0x}$ sebsséggel halad a szemközti falig. A falnak ütközve sebssége előjelet vált és a labda állandó $v_x' = v_{0x}$ sebsséggel halad vissza, a kiindulási falhoz. Azon pattanva sebssége ismért $v_x = v_{0x}$, koordinátája $x = 0$ lesz és a folyamat kezdödik előről. Tehát a fázistérben az $x \in [0, L_x]$ tartomanyba esnek, ahol a $v_x \in \{-v_{0x}, v_{0x}\}$ értékeket vehet fel. Az irányítás a fenti leírásnak megfelően az ábrán látható.

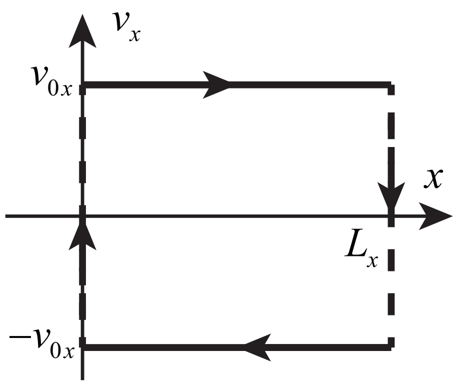


Figure 1: A pattogó labda $v_x - x$ fázisdiagramja

b. Az energia megmaradást felhasználva z kifejezhető v_z értékével:

$$E_z = \frac{1}{2}mv_z^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_{0z}^2 \tag{25}$$

$$z = \frac{1}{2g}\left(v_{0z}^2 - v_z^2\right) \tag{26}$$

Amennyiben L_z elég nagy a labda bejárja a teljes $z \in \left[0, \frac{v_{0z}^2}{2g}\right]$ tartományt, egyébéknt csak $z \in [0, L_z]$. Felpattanás során a labda sebessége pozitív. Amikor eléri az L_z magas plafont vagy pályájának maximális pontját, akkor sebssége előjelet vált és z koordinátája csökkeni kezd, amíg el nem éri a $z = 0$. Ekkor a folyamat kezdődik elölről.

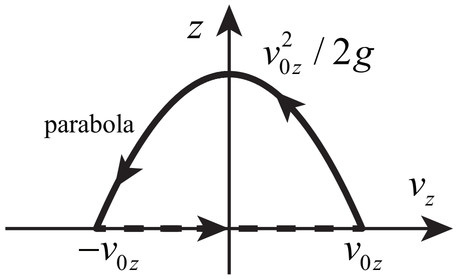


Figure 2: A pattogó labda $v_z - z$ fázisdiagramja, ha L_z nagy.

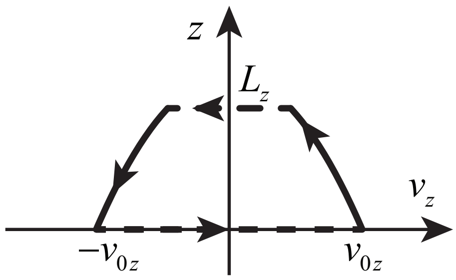


Figure 3: A pattogó labda $v_z - z$ fázisdiagramja, ha L_z nem elég nagy.

c. Amíg v_x pozitív a x tengely hasonló lesz egy időtengelyhez. Ehhez írjuk fel az x és z koordináták időfüggését, amíg $v_x > 0$!

$$x(t) = v_{0x}t \tag{27}$$

$$z(t) = v_{0z}\hat{t} - \frac{g}{2}\hat{t}^2 \tag{28}$$

Ahol $\hat{t}$ a legutolsó lepattanás óta eltelt idő. Azaz $\hat{t} = \left\{\frac{t}{2v_{0z}/g}\right\} \cdot \frac{2v_{0z}}{g}$, ahol $\{x\}$ az x törtrésze. z-t x-el kifejezve:

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\hat{x} - \frac{g}{2v_{0x}^2}\hat{x}^2 = \frac{2v_{0z}^2}{g}\left(\left\{\frac{xg}{2v_{0x}v_{0z}}\right\} - \left\{\frac{xg}{2v_{0x}v_{0z}}\right\}^2\right) \tag{29}$$

Ahol $\hat{x}$ a legutóbbi lepattanás óta megtett út x irányban. A fenti képletből láthatjuk, hogy a szemközti falnál $x = L_x$ estén a z koordináta éppen maximális. Tehát a labda akkor pattan a falnak, amikor pályája csúpontján jár, azaz $v = (v_{0x}, 0, 0)$. Ütközés utána sebessége éppen tükröződik, emiatt visszafelé is ugyanezen a pályán halad.

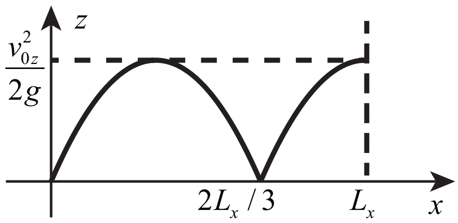


Figure 4: A pattogó labda $z - x$ fázisdiagramja, ha L_z elég nagy.

d. **Áruszállítás:** A feladat nehézsége a megfelelő fázistér megválasztása. Mivel a kérdés szempontjából lényegtelen az úton haladók sebssége, emiatt a két úton felvett helyzetek lesznek a hasznos koordináták.

Jelölje x_i az s_i úton haladó pont relatív távolságát az A várostól, az egész (s_i) hosszához képest! Azaz:

- $x_1 = 0$ jelentése: az s_1 úton haladó jármú az A városban van.
- $x_2 = 1$ jelentése: az s_2 úton haladó jármú a B városban van.
- $x_2 = 0.5$ jelentése: az s_2 úton haladó jármú pontosan fél úton jár az A és B város között.

Mit jelent az x_1-x_2 fázistéren, hogy az A-ból B-be haladva lehetséges, hogy sosem lesznek egymástól 200 m-nél messzebb? Mivel induláskor mind a két úton haladó ember az A városban van, ez azt jelenti, hogy a fázisterünk $(0, 0)$ pontjából indulnak. Az út végén mind a két úton haladó ember a B városban lesz, azaz a fázistér $(1, 1)$ pontja lesz a mozgás végpontja. Összefoglalva: a fázistér $(0, 0)$ pontjából az $(1, 1)$ pontba vezet egy olyan út[2], melyen legfeljebb 200 m távolságra van egymástól a két ember.

Mit szeretnénk elnérni a kamionokkal? Szeretnénk őket egyszerre, a két különböző városból a másik városba küldeni, úgy hogy közben mindig 200 m-nél távolabb legyenek

[2]Az út mindevégig az x_1, $x_2 \in [0, 1]$ tartományban marad

egymástól. Fordítsuk ezt le a fázistér nyelvére! Tegyük fel, hogy az A-ból induló B-be haladó kamion az s_1 úton, a B-ből induló és A-ba tartó kamion az s_2 úton halad! Ekkor induláskor $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, aza a fázistér $(0, 1)$ pontjában vagyunk, érkezéskor pedig ay $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ azaz a fázistér $(0, 1)$ pontjában leszünk. Tehát ez esetben az egység négyzet két másik csúcsót szeretnénk összekötni egy olyan úttal[3], melyen a két pont távolsága mindig nagyobb, mint 200 m. Bármilyen utat is rajzolunk a négyzetbe, mely az $(1, 0)$ pontot a $(0, 1)$ ponttal köti össze, az metszeni fogja a már korábban berajzolt utat. Így bárhogyan próbálnak menni a kamionok lesz egy pillanat, amikor legfeljebb 200 m távolságra lesznek egymástól. Tehát a szállítás nem lehetséges.

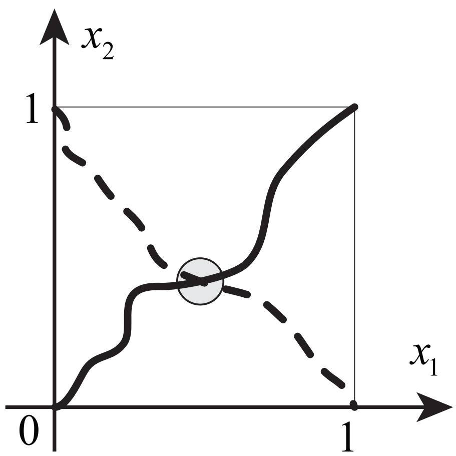


Figure 5: A szállítás fázitér ábrája.

[3]Az út mindevégig az x_1, $x_2 \in [0, 1]$ tartományban marad