1. feladat

(a) A feladat megadta a Naprendszer esetében a lakhatósági zóna határait, jelölje ezeket d_1 és d_2. A továbbiakban feltételezzük, hogy a csillag által kibocsátott sugárzás a tér minden irányában azonos és így egy gömbfelület mentén egyenletesen oszlik el. Így a beérkező sugárzási teljesítmény optimális alsó és felső határai:

$$P_{\max} = \frac{L}{4\pi d_1^2} = \frac{kM^{3,5}}{4\pi d_1^2}; \tag{1}$$

$$P_{\min} = \frac{L}{4\pi d_2^2} = \frac{kM^{3,5}}{4\pi d_2^2}. \tag{2}$$

Az 5 naptömegű bolygó esetén ez alapján a zóna belső és külső határai (d_1' és d_2'):

$$d_1'^2 = \frac{k(5M)^{3,5}}{4\pi P_{\max}} = 5^{3,5} \cdot \frac{kM^{3,5}}{4\pi P_{\max}} = 5^{3,5} \cdot d_1^2 \tag{3}$$

$$d_2'^2 = \frac{k(5M)^{3,5}}{4\pi P_{\min}} = 5^{3,5} \cdot \frac{kM^{3,5}}{4\pi P_{\min}} = 5^{3,5} \cdot d_2^2. \tag{4}$$

A megadott adatokat behelyettesítve:

$$d_1' = \sqrt{5^{3,5} \cdot (0,97 \text{ CsE})^2} = \textbf{16,22 CsE}; \tag{5}$$

$$d_2' = \sqrt{5^{3,5} \cdot (1,37 \text{ CsE})^2} = \textbf{22,9 CsE}. \tag{6}$$

(b) Az ellipszispálya excentricitása $0,2$, nagytengelyének fele $a = 4$ CsE, így a fókuszok távolságának fele $c = 0,2 \cdot 4 \text{ CsE} = 0,8 \text{ CsE}$, és ebből a fél kistengelye $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(4 \text{ CsE})^2 - (0,8 \text{ CsE})^2} = 3,92 \text{ CsE}$.

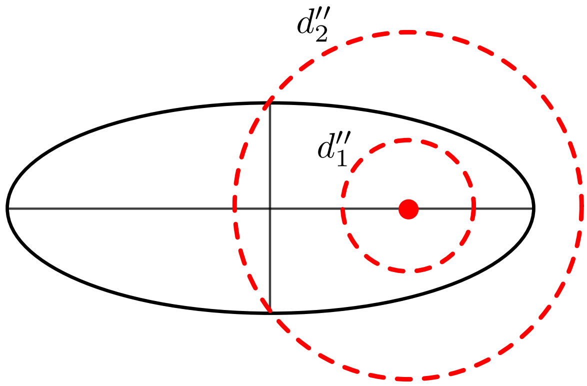
Az (a) feladatrészben felhasznált első és második egyenletből kapható, hogy az itteni lakhatósági zóna határokra (d_1' és d_2') vonatkozóan:

$$\frac{d_1''^2}{d_2''^2} = \frac{P_{\min}}{P_{\max}}. \tag{7}$$

Innen pedig megkapható az itteni lakhatósági zóna belső határa:

$$d_1'' = \sqrt{\frac{P_{\min}}{P_{\max}} \cdot d_2''^2} = \sqrt{\frac{d_1^2}{d_2^2} \cdot d_2''^2} = \frac{d_1}{d_2} \cdot d_2'' = \frac{0,97 \text{ CsE}}{1,37 \text{ CsE}} \cdot 4 \text{ CsE} = 2,83 \text{ CsE}. \tag{8}$$

A fentiekből megállapítható, hogy a lakhatósági zóna külső, illetve belső határa egy-egy kör mentén húzódik, melyeknek középpontja az ellipszispálya egyik fókusza (ahol a csillag van), sugara pedig d_2'' illetve d_1''. Így a külső határ köre éppen a kistengely végpontjában metszi az ellipszist (a 1 ábrán látható módon), a belső határ pedig nem metszi azt. Ebből



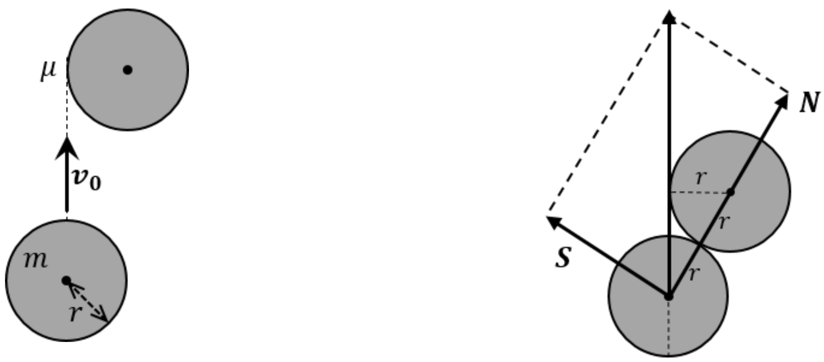
1. ábra. A bolygó elliptikus pályája, a külső és belső lakhatósági zónák határaival.

adódóan a bolygót mindig $P_{\max}$-nál kisebb sugárzási teljesítmény éri, csupán az a kérdés, az idő hányad részében lesz a zóna külső határán belül.

Kepler II. törvényét felhasználva kapható, hogy a benn töltött idő úgy aránylik az összeshez, mint a vezérsugár által súrolt terület az ellipszis teljes területéhez. A zónán belüli terület egy félellipszis, és egy háromszög területének különbsége: $T_{\text{bent}} = \frac{1}{2}ab\pi - \frac{1}{2}2bc$. A teljes ellipszis terület pedig $T_{\text{teljes}} = ab\pi$. A kettő aránya éppen a kérdéses időarány:

$$\frac{T_{\text{bent}}}{T_{\text{teljes}}} = \frac{\frac{1}{2}ab\pi - \frac{1}{2}2bc}{ab\pi} = \frac{1}{2} - \frac{bc}{ab\pi} = \frac{1}{2} - \frac{c}{a}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} - 0,2\frac{1}{\pi} \approx \mathbf{0{,}436} \tag{9}$$

2. feladat



2. ábra. Korongok az ütközés előtt és az ütközés pillanatában.

(a) A korongok az ütközés előtt a fenti 2. ábra baloldali ábráján látható módon helyezkednek el. Ütközéskor rövid Δt időpillanatra a korongok között N nyomóerő lép fel, amely $N\Delta t$ impulzusváltozást hoz létre a korongok tömegközéppontjait összekötő egyenes irányában (az egyes korongok esetében ezen erőlökések ellentétes irányúak). Ezzel együtt csúszási súrlódás is fellép, amely $S = \mu N$ nagyságú, így $\mu N \Delta t$ erőlökést eredményez a korongok közös érintőjének irányában. A két erőlökés okozta impulzusváltozás együtt az eredeti irányba mozdítja el a kezdetben álló korongot, így a jobb oldali ábrán látható módon a feladat geometriájából adódóan

$$\tan 30^\circ = \frac{\mu N \Delta t}{N \Delta t}. \tag{10}$$

Innen pedig a csúszási súrlódási együttható: $\mu = \tan 30^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

(b) A feladat szerint a két korong az ütközés után azonos nagyságú és irányú sebességgel (és impulzussal) halad tovább, így az impulzusmegmaradás törvénye alapján az ütközés utáni sebesség $v_0/2$. A nyomóerő és súrlódási erő okozta eredő erőlökés okozta ezt az impulzusváltozást, így a 2 jobboldali ábrájának geometriáját felhasználva:

$$\frac{N \Delta t}{\cos 30^\circ} = m \frac{v_0}{2}. \tag{11}$$

Következésképpen

$$N \Delta t = \frac{\sqrt{3}}{4} m v_0. \tag{12}$$

Ütközéskor a súrlódási erő a korongokra forgatónyomatékot fejt ki, melynek hatására azok forgásba jönnek. Rövid Δt idő alatt az ennek hatására létrejövő perdület nagysága $rS\Delta t$, ami a korábbiak alapján:

$$\Theta \omega = rS\Delta t = r\mu N \Delta t = r \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{4} m v_0 = \frac{1}{4} m r v_0. \tag{13}$$

Felhasználva, hogy a korongok esetén $\Theta = \frac{1}{2} m r^2$, kapjuk, hogy $\omega = \frac{v_0}{2r}$.

Az ütközés közben fejlődött hőt az energiamegmaradás törvényéből számíthatjuk ki:

$$E_{\text{halad},1} = E_{\text{halad},2} + E_{\text{forg},2} + Q. \tag{14}$$

Ebből kifejezve a keletkező hőt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2\right) \left(\frac{v_0}{2r}\right)^2 &= \frac{m v_0^2}{2} - \frac{m v_0^2}{4} - \frac{m v_0^2}{8} = \frac{m v_0^2}{8} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 0,16 \text{ kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{8\ Joule} \end{aligned} \tag{15}$$

3. feladat

(a) A kondentátor felső és alsó, $L/2 + x$ illetve $L/2 - x$ hosszúságú részét tekinthetjük két különálló, egymással párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak, amelyeknek kapacitásai $C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L(L/2+x)}{d}$ illetve $C_2 = \epsilon_0 \frac{L(L/2-x)}{d}$. Az eredő kapacitás tehát

$$C(x) = C_1 + C_2 = \underbrace{\frac{\epsilon_0 L^2}{2d}(1 + \epsilon_r)}_{C_0} + \underbrace{\frac{\epsilon_0 L}{d}(\epsilon_r - 1)}_{\alpha} x. \tag{16}$$

(b) Kezdjük Béla képletével. Ekkor az energia megváltozása, ha a dielektrikum helyzetét egy kezdeti fix x_0 helyzethez képest valamilyen kis δx hosszúságnyival megváltoztatjuk, $\delta \bar{E}_B = \frac{U^2}{2}\alpha\delta x$. Az ebből a munkatétellel származtatott erő az x_0 pontban $F_B(x_0) = -\frac{U^2}{2}\alpha$.

Anna esetében az energiaváltozás meghatározásához felhasználhatjuk a megadott képletet ($1/(1+\epsilon) \approx 1-\epsilon$). Jelöljük $\delta C = C(x_0+\delta x) - C(x_0) = \alpha\delta x$-el a kapacitás megváltozását. Ekkor megfelelően kicsi δx elmozdulás esetén

$$\bar{E}_A(x_0+\delta x) = \frac{Q^2}{2}\frac{1}{C+\delta C} = \frac{Q^2}{2C}\frac{1}{1+\delta C/C} \approx \frac{Q^2}{2C}\left(1 - \frac{\delta C}{C}\right).$$

Az ebből származó energiaváltozás tehát $\delta \bar{E}_A(x_0) = -\frac{Q^2}{2C(x_0)^2}\alpha\delta x$. Felhasználva hogy $Q/C(x_0) = U$, az erőre az $F_A(x_0) = \frac{U^2}{2}\alpha$ képletet kapjuk, ami valóban éppen -1-szerese a Béla által javasoltnak.

(c) Az Anna és Béla által kapott képletek közötti különbség oka, hogy míg Anna azt feltételezte, hogy a kondenzátor Q töltését veheti állandónak, addig Béla a kondenzátorlapok közötti U feszültséget tekinti annak. Amiről azonban Béla megfeledkezett, az az, hogy az állandó feszültség fenntartásához a kondenzátort egy telepre kell csatlakoztatnunk, ekkor pedig a telep energiáját is számításba kell vennünk az energia meghatározásánál: így tehát Béla képlete hiányos.

A telepnek, ahhoz hogy az állandü feszültséget fenntartsa miközben a dielektrikumot mozgatjuk, töltéseket kell a kondenzátorra felvinnie. Tegyük fel hogy a dielektrikumot egy kis δx távolsággal elmozdítjuk: jelöljük az eközben átvitt töltést δQ-val. Ekkor a telep által végzett munka, illetve az ehhez tartozó energiaváltozás $U\delta Q$. Ennek megfelelően ha Béla figyelembe vette volna a telepet is, akkor az alábbi képletet kellett volna írnia az energia megváltozására:

$$\delta \bar{E}_B(x) = \frac{U^2}{2}\delta C - U\delta Q. \tag{17}$$

Állandó feszültség mellett a δQ átvitt töltést kifejezhetjük a kapacitás megváltozásával mint $\delta Q = U\delta C$. Ezt figyelembe véve a fenti képlet leegyszerűsíthető:

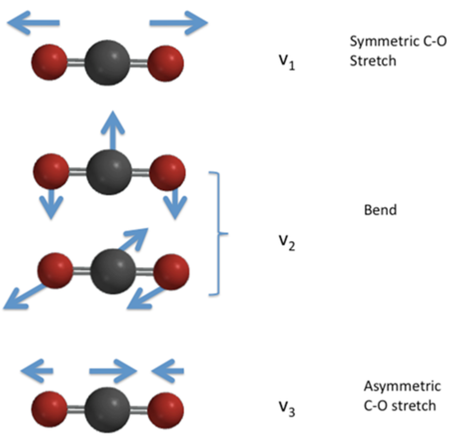
$$\delta \bar{E}_B(x) = -\frac{U^2}{2}\delta C. \tag{18}$$

Ez éppen -1-szerese a Béla által eredetileg felírt képletnek, így az ebből kapott erő immár megegyezik az Anna által számolttal.

4. feladat

(a) Minden atomnak 3 mozgási szabadságfoka van, így a teljes molekulának $3 \cdot 3 = 9$ szabadság foka van. A szabadsági fokok közül nem rezgés a 3 különböző irányú transzlációs mozgás és a molekula tengelyére (z-re) merőleges két tengely (x és y) körüli forgatás. Ez az 5 (transzlációs+forgási) szabadsági fok hőtanban is felbukkan lineáris/két atomos molekulák esetén. Azaz 9-5=4 rezgési szabadsági fok marad.

(b) A lehetséges rezgési módusok a 3. ábrán láthatóak.



3. ábra. CO_2 molekula rezgési módusai.

A hozzájuk tartozó kitérés vektorok:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\text{rezgés típusa} & \text{O} & \text{C} & \text{O} \\
\hline
\text{szimmetrikus, lineáris} & u_1 \cdot \vec{e_z} & 0 & -u_1 \cdot \vec{e_z} \\
\hline
\text{aszimmetrikus, lineáris} & u_1 \cdot \vec{e_z} & -u_1 \frac{2M}{m} \cdot \vec{e_z} & u_1 \cdot \vec{e_z} \\
\hline
\text{Torzió x} & u_1 \cdot \vec{e_x} & -u_1 \frac{2M}{m} \cdot \vec{e_x} & u_1 \cdot \vec{e_x} \\
\hline
\text{Torzió y} & u_1 \cdot \vec{e_y} & -u_1 \frac{2M}{m} \cdot \vec{e_y} & u_1 \cdot \vec{e_y} \\
\hline
\end{array}, \tag{19}
$$

Ahol m a szén és M az oxigén atom tömege.

(c) Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a megtalált szimmetrikus és aszimmetrikus módus normál módus. Hogy ezt bizonyítsuk megmutatjuk, hogy létezik egy ω frekvenciájú rezgő mozgás, amely során a rugókban ébredő erő pontosan a harmonikus mozgásban tartáshoz szükséges erő.

Szimmetrikus

Harmonikus rezgőmozgás esetén az atomok helyzete, illetve a harmonikus mozgáshoz szükséges kényszer erők:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
 & x(t) & F_h(t) \\
\hline
O & A \cdot \sin(\omega t) & -AM\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\
\hline
C & 0 & 0 \\
\hline
O & -A \cdot \sin(\omega t) & AM\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\
\hline
\end{array} \tag{20}
$$

A rugók összenyomódása:

$$\Delta x_1 = A \cdot \sin(\omega t) \tag{21}$$
$$\Delta x_2 = A \cdot \sin(\omega t) \tag{22}$$

Így az ébredő rugó erők:

$$F_{r1} = A \cdot D \cdot \sin(\omega t) \tag{23}$$
$$F_{r2} = A \cdot D \cdot \sin(\omega t) \tag{24}$$

Így az atomokra ható erők:

F_O	F_C	F_O
$-F_{r1} = -A \cdot D \cdot \sin(\omega t)$	$F_{r1} - F_{r2} = 0$	$F_{r2} = A \cdot D \cdot \sin(\omega t)$

(25)

Látható, hogy $\omega = \sqrt{\frac{D}{M}}$ esetén a rugó erők megfelelnek a harmonikus rezgő mozgás kényszererőivel.

Aszimmetrikus

Harmonikus rezgőmozgás esetén az atomok helyzete, illetve a harmonikus mozgáshoz szükséges kényszer erők:

	$x(t)$	$F_h(t)$
O	$A\sin(\omega t)$	$-AM\omega^2\sin(\omega t)$
C	$-\frac{2M}{m}A\sin(\omega t)$	$2MA\omega^2\sin(\omega t)$
O	$A\sin(\omega t)$	$AM\omega^2\sin(\omega t)$

(26)

A rugók összenyomódása:

$$\Delta x_1 = A\sin(\omega t) + \frac{2M}{m}A\sin(\omega t) \tag{27}$$
$$\Delta x_2 = -A\sin(\omega t) - \frac{2M}{m}A\sin(\omega t) \tag{28}$$

Így az ébredő rugó erők:

$$F_{r1} = AD\sin(\omega t) + \frac{2M}{m}AD\sin(\omega t) \tag{29}$$
$$F_{r2} = -AD\sin(\omega t) - \frac{2M}{m}AD\sin(\omega t) \tag{30}$$

Így az atomokra ható erők:

F_O	F_C	F_O
$-F_{r1} = -AD\sin(\omega t)\frac{m+2M}{m}$	$F_{r1} - F_{r2} = 2AD\sin(\omega t)\frac{m+2M}{m}$	$F_{r2} = AD\sin(\omega t)\frac{m+2M}{m}$

(31)

Látható, hogy $\omega = \sqrt{\frac{D(m+2M)}{mM}}$ esetén a rugó erők megfelelnek a harmonikus rezgő mozgás kényszererőivel.

(d) Az előző számítások során megkaptuk a normál rezgésekhez tartozó frekvenciát.

(e) A korábbi számításokból látható, hogy a szimmetrikus rezgéshez tartozik kisebb frekvencia. Felhasználva, hogy a direkciós erő (ω-n keresztül) kifejezhető a frekvenciával és az atomtömegekkel:

$$D_{szimm} = (2\pi\nu)^2 \cdot M = 1,36 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{32}$$

$$D_{aszimm} = (2\pi\nu)^2 \cdot \frac{mM}{m+2M} = 1,42 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{33}$$

Mivel a modellünk alapján a két direkciós állandónak azonosnak kéne lnnie, így azt állíthatjuk, hogy a direkciós állandó: $D = (1.39 \pm 0.03) \cdot 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

5. feladat

(a) Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a vonaltöltések a z irányban helyezkedjenek el, a középpontjaik pedig az x tengely mentén, úgy hogy a töltések helye az $x\!-\!y$ síkban $(\pm l, 0)$ koordinátáknak felel meg. A két vonaltöltés elektromos potenciálja az (x, y) koordinátájú pontban $U_\pm(x,y) = \pm\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{(x\pm l)^2+y^2})$ + konstans. A teljes potenciál ezen kettő összege (szuperpozíciója):

$$U(x,y) = U_+(x,y) + U_-(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}\right) + \text{konstans}. \tag{34}$$

Az ekvipotenciális felületeket az alábbi egyenlet határozza meg:

$$\frac{\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} = e^{\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}} \equiv k = \text{konst.} \tag{35}$$

Négyzetre emelve majd beszorozva a nevezővel, néhány algebrai átalakítás után a fenti egyenlet a következő alakra hozható:

$$\left(x - l\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = l^2\frac{4k^2}{(k^2-1)^2}. \tag{36}$$

Az ekvipotenciális feületek tehát a z tengellyel párhuzamos hengerek, amelyeknek sugara $R = l\left|\frac{2k}{k^2-1}\right|$, középpontja pedig az $x-y$ síkban $(x,y) = (d, 0)$, ahol $d = l\frac{k^2+1}{k^2-1}$.

(b) Mint fent láttuk, két ellentétes töltésűrűségű vonaltöltés terében az ekvipotenciálisok henger alakúak. A két vezető hengerből álló rendszer kapacitását tehát meghatározhatjuk úgy, hogy a hengereket olyan vonaltöltésekkel helyettesítjük, amelyeknek két ekvipotenciális felülete egybeesik a hengerek palástjával. Vegyük észre, hogy ha az egyik henger U potenciálon van akkor a másik $-U$-nak felel meg, hiszen $k(-U) = 1/k(U)$ és a fenti képleteknek megfelelően $d(1/k) = -d(k)$, valamint $R(1/k) = R(k)$. A két henger közötti feszültség (potenciálkülönbség) tehát $2U$. A hengereken lévő töltéssűrűségnek meg kell egyeznie a vonalak töltéssűrűségével ahhoz, hogy a megfelelő elektromos teret hozzák létre, így a kapacitás nem más mint

$$C = \frac{\lambda}{2U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(k)}, \tag{37}$$

ahol felhasználtuk az (35) egyenletet.

Még hátravan az, hogy kifejezzük a k paramétert a hengereket jellemző R és d paraméterekkel. Az előző feladatrész eredményeit felhasználva kapjuk az alábbi összefüggéseket:

$$d^2 - R^2 = l^2 \qquad \frac{d+l}{R} = k, \tag{38}$$

ahol $2l$ a (fiktív) vonaltöltések távolsága. E kettőt kombinálva azt kapjuk, hogy

$$k = d/R + \sqrt{d^2/R^2 - 1}. \tag{39}$$

Ezt behelyettesítve a (37) egyenletbe, kapjuk a kívánt eredményt:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{R} + \sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1}\right)}. \tag{40}$$