Fizika F kategória (11-12. osztályosok)

Döntő, elméleti forduló

Megoldókulcs

1. feladat

A megoldáshoz az ideális gázokra vonatkozó két alapösszefüggést fogjuk felhasználni. Az első az ideális gáztörvény:

$$pV = nRT, \tag{1}$$

ahol R az univerzális gázállandó, p, V, n és T pedig rendre a gáz nyomása, térfogata, anyaegmennyisége (mólban) illetve hőmérséklete. A második összefüggés amelyre szükségünk van a gáz belső energiája (E) és hőmérséklete közötti összefüggés:

$$E = \frac{3}{2}nRT. \tag{2}$$

.

A gáztörvényt felhasználva megkaphatjuk külön az első, illetve a második térrészben lévő gáz egyensúlyi hőmérsékletét:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{R n_1} \tag{3a}$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{R n_2} \tag{3b}$$

Ezt felhasználva a a (2) összefüggés megadja a belső energiákat:

$$E_1 = \frac{3}{2}Rn_1T_1 = \frac{3}{2}p_1V_1 \tag{4a}$$

$$E_2 = \frac{3}{2}Rn_2T_2 = \frac{3}{2}p_2V_2 \tag{4b}$$

Miután kivesszük a falat a két térrész közül, a kialakuló egyensúlyi gáz teljes térfogata, anyagmennyisége, illetve belső energiája a két rész összegeként adódik:

$$V = V_1 + V_2 \tag{5a}$$

$$n = n_1 + n_2 \tag{5b}$$

$$E = E_1 + E_2 \tag{5c}$$

.

Az egyensúly kialakulása után a gáz hőmérséklete:

$$T = \frac{2}{3}\frac{E}{Rn} = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{R(n_1 + n_2)} \tag{6}$$

Tehát a gáz nyomása:

$$p = \frac{nRT}{V} = p_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2} + p_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2} \tag{7}$$

2. feladat

Vegyünk fel egy koordináta rendszert, melyben a $z = 0$ sík a talaj, a karó alja az origó, és a fényforrás az x tengellyel párhuzamosan halad! Ekkor a karó tetejének helyvektora: $r_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a fényforrás koordinátája a t időpontban: $r_f(t) = \begin{pmatrix} v \cdot t \\ y_f \\ 5 \end{pmatrix}$, ahol a fényforrás y koordinátája (y_f) ismeretlen. A karó teteje és a fényforrás távolsága:

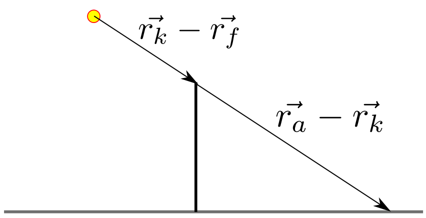
$$|r_k - r_f| = \sqrt{(0 - v \cdot t)^2 + (0 - y_f)^2 + (1 - 5)^2} \tag{8}$$

Láthatóan ez a fényforrás mozgása során $t = 0$-ban minimális. A feladat szerint ekkor a távolság 5 m:

$$\begin{aligned} 5 &= \sqrt{(0 - v \cdot 0)^2 + (0 - y_f)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{16 + y_f^2} \qquad (9) \\ y_f &= \pm 3 \qquad (10) \end{aligned}$$

Az y tengely irányának megválasztásában még szabadságunk van, így válasszuk úgy, hogy $y_f = 3$ teljesüljön!
A karó tetejének árnyéka a $z = 0$ síkban van. Az x és y koordinátáit jelöljük $x_a(t)$ és $y_a(t)$-vel! Tehát az árnyék végpontja az idő függvényében: $r_a = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y_a(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

A fényforrás, a karó teteje és az árnyék teteje egy egyenesbe esik, emiatt a fényforrásból a karó



tetejére mutató vektor számszorosa a karó tetejéből az árnyék végpontjába mutató vektornak (lásd a fenti ábrán).

Tehát létezik egy λ szám, melyre az alábbi egyenlet teljesül:

$$\begin{aligned} \lambda \left(r_k - r_f\right) &= \left(r_a - r_k\right) \qquad (11) \\ \lambda \begin{pmatrix} 0 - v \cdot t \\ 0 - 3 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_a(t) - 0 \\ y_a(t) - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \qquad (12) \end{aligned}$$

A z koordináta alapján az egyenlőség csak $\lambda = 1/4$ esetén teljesülhet. Ekkor az árnyék végpontjának x és y koordinátái: $x_a(t) = \frac{-v \cdot t}{4}$, $y_a(t) = \frac{-3}{4}$. Tehát az árnyék végpontja egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez az x tengellyel párhuzamosan, $-v/4$ sebességgel.

3. feladat

A Q töltés terében mozgó q töltés potenciális energiája a következő alakú:

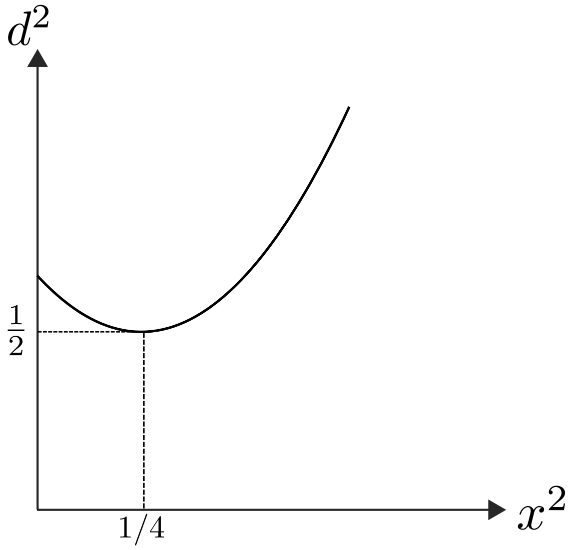
$$E_{\mathrm{pot}} = k\frac{Qq}{r}, \tag{13}$$

vagyis a két töltés távolságának reciprokával arányos. A q töltés stabil (instabil) egyensúlyi helyzetei ezen potenciális energia lokális minimumainak (maximumainak) felelnek meg. Mivel az $\frac{1}{x}$ függvény monoton, így a potenciális energiának pontosan ott van szélsőértéke, ahol a két töltés távolságának is szélsőértéke van.

Mivel a q töltés az $y = x^2$ egyenletű parabola mentén halad, így a Q töltéstől vett d távolságát kifejezhetjük, mint a q töltés x koordinátájának függvényét:

$$d^2 = x^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}, \tag{14}$$

ahol az utolsó lépésben teljes négyzetté alakítottunk. Ahogy látható, a két töltés távolságának négyzete másodfokú függvénye x^2-nek. Érdemes ezt a függvényt ábrázolni:



Látható, hogy a távolság minimális abban az esetben amikor $x^2 = y = \frac{1}{4}$. Ez két pontban teljesül, $x = \pm\frac{1}{2}$-nél. Ezen felül, mivel a függvény csak $x^2 \geq 0$ esetén értelmes, így a távolságnak van egy maximuma is, az $x = y = 0$ pontban. Erről a pontról könnyen láthatjuk, hogy valóban egyensúlyi helyzetnek felel meg, hiszen ebben a pontban a töltések között ható elektrosztatikus erő láthatólag merőeges a parabolára (tehát nincs olyan komponense amely a parabola mentén tudná gyorsítani a q töltést).

A fenti érvelés alapján a q töltés a parabola mentén három pontban van egyensúlyban, ezek koordinátái: $(0,\ 0)$, $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4})$. Hogy ezek közül melyek stabiak és melyek instabilak, az attól függ hogy a Q töltés q-val azonos vagy ellentétes előjelű-e. Ha az előjelek azonosak akkor a két töltés taszítja egymást, vagyis a stabil egyensúly a köztük lévő távolság egy lokális maximumának felel meg. Jelen esetben a távolság akkor maximális, ha a q töltés az $x = 0$ pontban tartózkodik, ez tehát a potenciális energiának lokális minimuma, vagyis egy stabil egyensúlyi helyzet. Innen kicsit kimozdítva a töltések közötti távolág csökken, ami energetikailag kedvezőtlen, így egy visszatérítő erő lép fel, a q töltés pedig kis rezgéseket végez az egyensúlyi helyzete körül a parabola mentén. Ezzel szemben az $x = \pm\frac{1}{2}$ pontokban a töltések távolsága minimális, vagyis a potenciáis energiának lokális maximuma van, ami egy instabil egyensúlyi helyzetnek felel meg. Innen kimozdítva a töltést a távolság nő, ami az energia csökkenéséhez vezet és így egy olyan erő lép fel amely a töltést még messzebbre viszi az instabil egyensúlyi ponttól. Ha a töltést az $x = 0$ pont irányába modítjuk el akkor ismét e körül a pont körüli rezgéseket kapunk (természetesen ha a gyöngy és a drót közötti súrlódást is figyelembe vesszük akkor ezek a rezgések idővel csillapodnak és a gyöngy végül megáll az $x = 0$ egyensúlyi helyzetben). Ellenben ha a q töltést az instabil egyensúlyi pontból az origótól elfelé mozdítjuk ki, akkor a végtelenségig fog távolodni a parabola megfelelő szára mentén, miközben a potenciális energiája egyre csökken.

Abban az esetben amikor a két töltés ellenkező előjelű, a potenciális energia előjele megfordul. Ekkor azok a pontok amelyek korábban lokális minimumok voltak, lokális maximumokká válnak és fordítva. Ekkor az $x = \pm\frac{1}{2}$ pontok, ahol a távolság minimális, lesznek a stabil egyensúlyi helyzetek, amelyekből a töltést komozdítva visszatérítő erő hat rá. Ezzel szemben az $x = 0$ pont instabillá válik, innen kimozdítva a töltés etávolodik és valamelyik egyensúlyi pont körül végez rezgéseket (hogy melyik körül az attól függ, hogy kezdetben az origóból jobbra vagy balra térítjük-e ki).

4. feladat

A rúd először szabadon esik amíg el nem éri a tű tetejét. Akkor a sebessége az energiamegmaradásnak megfelelően $v_0 = \sqrt{2g(h-d)}$. Ez után rugalmas ütközést szenved, amelynek során a teljesen mozgási energiája változatlan larad. Az ütközés során a rúd végpontja egy Δp impulzust kap. Ezt követően a rúd mozgása két részből tevődik össze: a rúd tömegközéppontjának transzlációjából és a tömegközéppont körüli forgásból. A tömegközéppont ütközés utáni sebességét jelöljük v-vel, a rúd tömegközéppont körüli forgásának szögsebességét pedig ω-val. E három ismeretlenre (Δp, v, ω) három egyenletet tudunk felírni, amelyek az energia-, lendület- illetve perdületmegmaradást fejezik ki:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \qquad \text{Energiamegmaradás} \tag{15}$$

$$Mv = Mv_0 + \Delta p \qquad \text{Lendületmegmaradás} \tag{16}$$

$$\Theta\omega = \frac{L}{2}\Delta p \qquad \text{Perdületmegmaradás} \tag{17}$$

,

ahol M a rúd tömege, $\Theta = \frac{1}{12}ML^2$ pedig a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka.

Kifejezve Δp-t a a (17) egyenletből és beírva a a (16) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$v = v_0 + \frac{2\Theta\omega}{ML} = v_0 + \frac{\omega L}{6}. \tag{18}$$

Ezt beírva a a (15) egyenletbe kapunk egy összefüggést ω-ra:

$$\left(v_0 + \frac{\omega L}{6}\right)^2 + \frac{L^2\omega^2}{12} = v_0^2 \tag{19}$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{\omega L}{3}\left(\frac{\omega L}{3}+v_0\right)=0 \tag{20}$$

A fizikai megoldás $\omega \neq 0$ tehát

$$\omega=-\frac{3v_0}{L} \tag{21}$$

.

Ezt visszaírva megkapjuk az ütközés utáni tömegközépponti sebességet, amelyre a következő kfejezés adódik:

$$v=v_0-\frac{3v_0}{L}\frac{L}{6}=\frac{v_0}{2} \tag{22}$$

.

Tekintsük most a rúdnak a tűvel átellenes végpontját. E pont mozgása az ütközés után két részből tevődik össze: a tömegközéppont szabadesést végez v lefelé mutató kezdősebességgel és ehhez adódik hozzá a tömegközéppont körüli körmozgás ω szögsebességgel. A vizsgált végpont y (talajra merőleges) koordinátája a tűvel való ütközés után t idővel

$$y(t)=d-vt-\frac{1}{2}gt^2-\frac{L}{2}\sin|\omega|t \tag{23}$$

.

A rúd először akkor ér a talajhoz, amikor $y(t)$ eléri a 0-t. Mivel eddig a rúd éppen egy negyedfordulatot tett meg, így ebben a pillanatban $|\omega|t=\pi/2$, vagyis az eltelt idő $t=\pi L/6v_0$. Ezt beírva $y(t)$ képletébe és azt egyenlővé téve nullával kapunk egy egyenletet a tű d magasságára:

$$d-\frac{v_0}{2}\frac{\pi L}{6v_0}-\frac{g}{2}\frac{\pi^2L^2}{36v_0^2}-\frac{L}{2}=0 \tag{24}$$

Felhasználva, hogy $v_0^2=2g(h-d)$ az alábbi másodfokú egyenlet adódik d-re:

$$d^2-d\left(h+\frac{L}{2}+\frac{\pi L}{12}\right)+h\left(\frac{L}{2}+\frac{\pi L}{12}\right)+\frac{\pi^2L^2}{144}=0 \tag{25}$$

,

amelynek megoldásai

$$d_{1,2}=\frac{h+\frac{L}{2}+\frac{\pi L}{12}\pm\sqrt{\left(h-\frac{L}{2}-\frac{\pi L}{12}\right)^2-4\left(\frac{\pi L}{12}\right)^2}}{2} \tag{26}$$

.

Beírva a konkrét adatokat ($h=10$ m, $L=6$ m) a két megoldás:

$$d_1\approx 9,50 \text{ m} \tag{27a}$$
$$d_2\approx 5,07 \text{ m.} \tag{27b}$$

Az első esetben a hosszabb idő alatt egy kisebb szögsebességgel történik, míg a második megoldás annak felel meg, hogy a rúd később ütközik a tűvel és így egy nagyobb szögsebességet kap, amelynek köszönhetően rövidebb idő alatt fordul körbe.

5. feladat

1. megoldás

A harmonikus rezgő mozgást végző test energiája a mozgási és a helyzeti energiák összege, amely a test x koordinátájával és $p = mv$ impulzusával kifejezve így írható:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2. \tag{28}$$

Mivel feltettük, hogy $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$, azaz mind a koordináta, mind pedig az impulzus várható értéke nulla, így az energia várható értéke kifejezhető a szórásokkal:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{D}{2}\langle x^2 \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{D}{2}(\Delta x)^2. \tag{29}$$

A határozatlansági relációt elosztva Δp-vel és négyztere emelve

$$(\Delta x)^2 \geq \frac{h^2}{16\pi^2(\Delta p)^2}, \tag{30}$$

így az energia várható értékét felülről becsülhetjük a következőképpen:

$$\langle E \rangle \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{D}{2}\frac{h^2}{16\pi^2(\Delta p)^2}. \tag{31}$$

Ezen a ponton kihasználhatjuk az $a + \frac{1}{a} \geq 2$ egyenlőtlenséget. Osszuk le a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{h\sqrt{D/m}}{8\pi}$-vel! Ekkor bevezetve az $q = \frac{4\pi h(\Delta p)^2}{\sqrt{mD}}$ mennyiséget

$$\frac{8\pi}{h\sqrt{D/m}}\langle E \rangle \geq a + \frac{1}{a} \geq 2. \tag{32}$$

Visszaszorozva:

$$\langle E \rangle \geq \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \tag{33}$$

2. megoldás

Egyszerűbben is eljuthatunk ugyanerre az eredményre ha felhasználjuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, miszerint $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$. Ezt felhasználva

$$\langle E \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{D}{2}(\Delta x)^2 \geq \sqrt{\frac{D}{m}}\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \tag{34}$$