Fizika F kategória (11-12. osztályosok)

Helyi forduló

Megoldókulcs

1. feladat

Első módszer

Adott egy gerenda, amely M tömegű és L hosszúságú, vízszintesen van felfüggesztve két végénél fogva. Abban a pillanatban, mikor az egyik oldali felfüggesztés megszűnik, a következő hatások érik a testet:

- Abban a pontjában, ahol még él a felfüggesztés, hat egy függőleges irányú K kötélerő.
- A test tömegközéppontjában hat a gravitációból származó erő.
- A test gyorsuló körmözgást végez a gravitáció hatására, a megmaradt felfüggesztési pont körül.

Írjuk fel a fent felsorolt hatások egyenleteit! Kezdjük a Newton egyenlettel!

$$Ma_{\mathrm{TKP}} = Mg - K \tag{1}$$

A testnek azonban van egy szöggyorsulása is:

$$\Theta_p \beta = Mg\frac{L}{2} \tag{2}$$

Ahol Θ_p a még élő felfüggesztési pont körül forgó rúd tehetetlenségi nyomatéka. Értéke (táblázatból): $\Theta_p = \frac{1}{3}ML^2$.

Mivel a rúd merev test, ezért fel lehet írni tetszőleges pontjának gyorsulását a szöggyorsulás segítségével. Írjuk fel a tömegközéppont gyorsulását!

$$a_{\mathrm{TKP}} = \beta\frac{L}{2} \tag{3}$$

A (2) egyenletből kifejezve β-t és behelyettesítve a (3) egyenletbe, megkapjuk a gyorsulást:

$$a_{\mathrm{TKP}} = \frac{3}{4}g \tag{4}$$

Visszahelyettesítve a_{TKP} értékét az (1) egyenletbe és kifejezve K-t, az eredmény:

$$K = \frac{1}{4}Mg \tag{5}$$

Ami annyit jelent, hogy a második munkás, aki még tartotta a rudat éppen fele akkora erőt fog érezni, mint amikor még ketten tartották, számszerűen $K = 103\mathrm{N}$.

Második módszer

Az előző megoldási módszer meggondolásai itt is érvényesek, azonban az egyenletek fel lehet írni a tömegközéppontra vonatkoztatva is. Ekkor a (2) egyenlet a következőképpen módosul:

$$K\frac{L}{2} = \Theta_{\mathrm{TKP}}\beta = \frac{1}{12}ML^2\beta \tag{6}$$

Másrészt

$$Ma_{\mathrm{TKP}} = Mg - K \tag{7}$$

A (3) egyenlet most is érvényes, ezt felhasználva:

$$K\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2\frac{2a_{\mathrm{TKP}}}{L} = \frac{1}{6}MLa_{\mathrm{TKP}} \tag{8}$$

Egyszerűsítés utána:

$$K = \frac{1}{3}Ma_{\mathrm{TKP}} \tag{9}$$

Az előző megoldáshoz hasonlóan kiszámoljuk β értékét és behelyettesítjük K kifejezésébe. A végeredmény:

$$K = \frac{1}{4}\mathrm{Mg} = 103\mathrm{N} \tag{10}$$

2. feladat

A „gyorsulási terhelést” az űrhajóssal együtt mozgó rendszerben fellépő kényszererőkből számolhatjuk. A gyorsulási terhelés nagysága a fellépő kényszerők eredőjének és a test tömegének hányadosa, iránya ellentétes a kényszererők eredőjének irányával. (Gondolhatunk a kényszererőkre úgy, mintha az űrhajós a vele együtt mozgó rendszerhez (kabinhoz) egy rugón keresztül kapcsolódna. Ekkor a rugó irányából leolvashatjuk az eredő kényszererő irányát, a rugó megnyúlásából annak nagyságát.) Az eredő kényszererő (-1)-szerese megegyezik az űrhajósra ható (nem a kabinnal való kölcsönhatásból származó) erők eredőjével. Érdemes leellenőrizni, hogy a fenti definíció egy geostacionárius pályán keringő űrhajósra 0, míg egy Föld felszínén álló űrhajósra $\vec{g}$ gyorsulási terhelést ad, a várakozásainknak megfelelően.

(a) Adjuk meg, hogy milyen gyorsulási terhelésnek vannak kitéve a felfelé haladó űrliftezők, a felszíntől számított h magasságban! ($\boldsymbol{a}(h)$ =?)

Vegyünk fel egy koordináta rendszert, melynek origója a lift talapzatával együtt mozog, $\vec{x}$ tengelye keleti, $\vec{y}$ tengelye pedig északi irányba, $\vec{z}$ tengelye pedig az űrlift oszlopával megegyezően a bolygótól kifelé mutat. Az űrhajósra ható erők a vele együtt mozgó rendszerben:

- A Föld gravitációs ereje ($\vec{F}_g$), ami $-\vec{z}$ irányú
- A centrifugális erő ($\vec{F}_{\mathrm{cf}}$), ami $\vec{z}$ irányú
- Egy $\vec{x}$ irányú erő ($\vec{F}_t$), ami a változó sugarú körpályán lévő űrhajóst olyan sebességre gyorsítja, hogy a periódus ideje állandó maradjon.

A gravitációs erő nagysága a bolygó felszínétől h magasságban:

$$F_g(h) = -G\frac{mM}{(R+h)^2}, \tag{11}$$

ahol G a gravitációs állandó. A centrifugális erő nagysága a bolygó felszínétől h magasságban:

$$F_{\text{cf}}(h) = m \cdot (R+h) \cdot \omega(h)^2 = \frac{4\pi^2 m \cdot (R+h)}{T^2}, \tag{12}$$

ahol $\omega(h)$ az űrhajós szögsebessége h magasságban, amely a liftezés közben állandó: $\omega(h) = \frac{2\pi}{T}$. Az $\vec{x}$ irányú gyorsító erő kiszámításához vizsgáljuk azt a pillanatot, amikor a lift a felszíntől h magasságban van, illetve egy kicsi Δt idővel későbbi pillanatot! A későbbi pillanatban a lift $h + \Delta t \cdot v$ magasságban lesz. Az űrhajós kerületi sebességének nagysága a két időpillantban:

$$\begin{aligned} v_{\tan}(h) &= \omega(h) \cdot (R+h) = \frac{2\pi(R+h)}{T} & (13)\\ v_{\tan}(h+\Delta t \cdot v) &= \omega(h) \cdot (R+h) = \frac{2\pi(R+h+v\Delta t)}{T} & (14)\end{aligned}$$

Az F_t erőt az x irányú impulzusváltozásból fejezhetjük ki:

$$F_t(h) = \frac{\Delta I_x}{\Delta t} = \frac{m \cdot (v_{\tan}(h+\Delta t \cdot v) - v_{\tan}(h))}{\Delta t} = \frac{2\pi m v}{T}. \tag{15}$$

Tehát az űrhajósra ható eredő erő (kényszer erők nélkül) h magasságban:

$$\vec{F}(h) = \begin{pmatrix} F_t(h) \\ 0 \\ F_g(h) + F_{\text{cf}}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi m v}{T} \\ 0 \\ \frac{4\pi^2 m\cdot(R+h)}{T^2} - G\frac{mM}{(R+h)^2} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

ahol az felső, középső, alsó komponensek sorban az x, y, z irányú erőknek felelnek meg. Tehát az űrhajósra ható gyorsulási terhelés: $a_{\text{terhelés}} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi v}{T} \\ 0 \\ \frac{4\pi^2\cdot(R+h)}{T^2} - G\frac{M}{(R+h)^2} \end{pmatrix}$.

(b) A 9D7F2016 egy újonnan felfedezett kisbolygó. Tömege T =1,5·10^{14} kg, egyenlítői sugara $R = 2$ km, forgási periódusideje $T = 3$ óra. Mennyi a kisbolygó körüli geostacionárius pálya sugara? ($R_{geostac.}$ =?)

A geostacionálrius pálya egy olyan bolygó körüli körpálya, melyen a periódus idő azonos a bolygó forgásával és a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt a bolygó gravitációs vonzása biztosítja. Egy R sugarú körpályán T periódusidővel egyenletesen mozgó m tömegű testetre a pályán tartáshoz $F_{cp} = \frac{4\pi^2 m R_{\text{geostac}}}{T^2}$ nagyságú centripetális erő szüksges. Ez azonos az M tömegű bolygó által kifejtett gravitációs erővel, melyből a pályasugár meghatározható:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2 m R_{\text{geostac}}}{T^2} &= G\frac{mM}{R_{\text{geostac}}^2} & (17)\\ R_{\text{geostac}} &= \sqrt[3]{\frac{G\,m \cdot M\,T^2}{4\pi^2}}. & (18)\end{aligned}$$

A feladatban megadott adatok alapján $R_{\text{geostac}} = 3093$ m.

(c) A 9D7F2016-on megépült az űrlift, melynek legfelső pontja éppen a geostacionárius pályán van. Mekkora lesz a liftezőkre ható maximális illetve minimális gyorsulási terhelés nagysága? ($a_{\max}$ =?, $a_{\min}$=?) (A lift indulásakor illetve megállásakor fellépő nagy gyorsulásoktól tekintsünk el!)

A gyorsulási terhelés nagyságát azaz a vektor hosszát a Pithagorasz-tételből számíthatjuk. Az $\vec{a}_{terhelés} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ vektor hossza: $a_{terhelés} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Az (a) feladatrészből tudjuk, hogy a liftezés alatt $a_x = 2\pi mv/T$, $a_y = 0$, azaz állandók. A terhelés z komponense $a_z = \frac{4\pi^2 \cdot (R+h)}{T^2} - G\frac{M}{(R+h)^2}$. A lift emelkedése közben a kisebbítendő növekszik, a kivonandó csökken, így a különbség (azaz a_z) növekszik. A (b) rész alapján tudjuk, hogy a geostacionárius pályán (a lift tetején) $a_z = 0$. Tehát a lift emelkedését végig követve: a_z értéke a Föld felszínén negatív, és folyamatosan növekszik egészen 0-ig, amit a lift legfelső pontján ér el. Emiatt a terhelésn ($a_{terhelés}$) maximális értékét a lift indulásakor, minimális értékét a lift megállásakor a geostacionárius pályánál veszi fel.

$$a_{terhelés,max} = a_{terhelés}(h=0) = \sqrt{\left(\frac{2\pi mv}{T}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4\pi^2 \cdot (R)}{T^2} - G\frac{M}{(R)^2}\right)^2}, \tag{19}$$

$$a_{terhelés,min} = a_{terhelés}(R+h = R_{\text{geostac.}}) = \sqrt{\left(\frac{2\pi mv}{T}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{2\pi mv}{T}. \tag{20}$$

3. feladat

A feladat megoldásához a Stefan-Botzmann törvényt használjuk. Írjuk fel az első részfeladat szövegének megfelelően a Stefan-Boltzmann törvényt, ha a Földet érő átlagos fluxus I!

$$I = \sigma T_{F0}^4 \tag{21}$$

Ebből kifejezhetjük T_{F0}-t:

$$T_{F0} = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{239W/m^2}{5,672 \cdot 10^{-8}W/(m^2K^4)}\right)^{1/4} = 254,78K \tag{22}$$

A következő részfeladathoz írjuk fel a mérlegegyenletet! A Földet érő sugárzás I a Napból származik, azonban származik még a légkörből is sugárzás, ennek értéke a feladat szövege alapján r-ad része a Földről érkező sugárzásnak. Ez alapján a mérlegegyenletek a földfelszínre:

$$I - \sigma T_F^4 + \sigma T_a^4 = 0 \tag{23}$$

$$\sigma T_a^4 = \sigma \frac{r}{2} T_F^4 \tag{24}$$

ahol T_a a felhőréteg hőmérséklete.

Most már csupán meg kell oldani az egyenleteket T_a-ra és T_F-re. Az egyenletrendszer megoldása:

$$T_F = \left(\frac{2}{2-r}\right)^{1/4} T_{F0} \tag{25}$$

$$T_a = \left(\frac{r}{2}\right)^{1/4} T_F \tag{26}$$

Ahhoz, hogy $T_F = 289K$ legyen

$$r = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{T_{F0}}{T_F}\right)^{1/4}\right] = 0,79 \tag{27}$$

Ekkor a felhőréteg hőmérséklete:

$$T_a = 229,2K \tag{28}$$

4. feladat

(a) Mekkora a gáz hőmérséklete a folyamat egyes szakaszainak kezdetén és végén (a háromszög csúcsaiban)? Mennyivel változik a gáz belső energiája az egyes szakaszokon?

Használjuk fel az ideális gáz állapotegyenletét, vagyis:

$$pV = nRT, \tag{29}$$

ahol $R = 8,3144$ JK^{-1}mol^{-1} az univerzális gázállandó, $n = 1$ mol pedig a gáz anyagmennyisége. Ennek segítségével könnyen meghatározhatjuk a hőmérsékletet az egyes csúcsokban. Jelölje az A pont az 1. szakasz kezdetét, a B pont az 1. szakasz végét (2. szakasz kezdetét), C pedig a 2. szakasz végét (3. szakasz kezdetét). Ekkor a megfelelő hőmérsékletek:

$$T_A = \frac{p_0 V_0}{R} \tag{30a}$$

$$T_B = \frac{6 p_0 V_0}{R} \tag{30b}$$

$$T_C = \frac{2 p_0 V_0}{R} \tag{30c}$$

Ahhoz hogy ebből megkapjuk az egyes szakaszok teljes energianyereségét illetve veszteségét, fel kell használnuk, hogy az ekvipartíciónak megfelelően a gáz teljes belső energiája a következő alakban írható:

$$E = \frac{3}{2} nRT. \tag{31}$$

Így az egyes szakaszok energiakülönbsége:

$$\Delta E_1 = \frac{3}{2} R(T_B - T_A) = \frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot 5 \tag{32a}$$

$$\Delta E_2 = \frac{3}{2} R(T_C - T_B) = \frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot (-4) \tag{32b}$$

$$\Delta E_3 = \frac{3}{2} R(T_A - T_C) = \frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot (-1) \tag{32c}$$

(b) Mennyi munkát végez a gáz a teljes körfolyamat alatt? Mennyi a munkavégzés az egyes szakaszokon?

Az első két szakaszon könnyen meghatározhatjuk a gáz munkavégzését. Az 1. szakaszon a gázt állandó nyomáson hagyjuk kitágulni. Ekkor az általa végzett munka:

$$W_1 = p_0 \Delta V_1 = p_0 V_0 \cdot 5 \tag{33}$$

A második szakaszon a térfogat állandó, így sem a gáz nem végez munkát (ehhez ki kellene tágulnia), sem mi nem végzünk munkát a gázon (ekkor összenyomnánk). Tehát a második szakaszon nincs munkavégzés:

$$W_2 = 0 \tag{34}$$

Mielőtt kiszámítanánk az utolsó szakaszon történő munkavégzést, előbb határozzuk meg a teljes körfolyamat során végzett munkát. Ez megegyezik a $p - V$ diagramon a körfolyamat által bezárt területtel. A mi esetünkben ez egy derékszögű háromszög területe amit könnyen kiszámíthatunk:

$$W_{\text{teljes}} = \frac{1}{2} 5V_0 \frac{2p_0}{3} = \frac{5}{3} V_0 p_0. \tag{35}$$

Mivel ez a teljes munka az 1. és a harmadik szakaszon munkavégzéséből adódik össze, így most már meghatározhatjuk hogy mennyi munkát végzünk a gázon miközben összenyomjuk a 3. szakasz során:

$$W_3 = W_{\text{teljes}} - W_1 = V_0 p_0 (5/3 - 5) = -\frac{10}{3} p_0 V_0 \tag{36}$$

(az előjel negatív, mivel nem a gáz végez munkát, hanem mi végzünk munkát a gázon).

(c) Mennyi a gáz által felvett/leadott hő az 1, 2. illetve 3. szakaszon?

Az előző két feladatrészben már kiszámítottuk a teljes energiaváltozást és a teljes munkavégzést is. A termodinamika első főtétele alapján a gáz által az egyes szakaszokon leadott/felvett teljes hőt egyszerűen megkaphatjuk. A teljes energiaváltozás minden szakaszon a gáz által felvett hő és a gázon végzett munka összege: $\Delta E = Q + W$. Itt W a *gázon* végzett munka, tehát a gáz által végzett munkának (amit az előző feladatrészben kiszámoltunk) a -1-szerese. Ennek alapján az egyes szakaszok alatt felvett teljes hő:

$$Q_1 = \Delta E_1 + W_1 = p_0 V_0 (15/2 + 10) = \frac{25}{2} p_0 V_0 \tag{37a}$$

$$Q_2 = \Delta E_2 + W_2 = -6 p_0 V_0 \tag{37b}$$

$$Q_3 = \Delta E_3 + W_3 = p_0 V_0 (-3/2 - 10/3) = -\frac{29}{6} p_0 V_0 \tag{37c}$$

$$\tag{37d}$$

A pozitív előjel azt jelenti, hogy a gáz az adott szakaszon hőt vett fel, míg negatív előjel esetén hőt adott le a környezetének.

(d) Meg tudnánk-e határozni az előző feladatrészekben kiszámolt adatokból a körfolyamat hatásfokát? Ha nem, milyen információra lenne még szükségünk?

A körfolyamat hatásfoka nem más, mint a folyamat során végzett munkának és a folyamat alatt összesen felvett hőmennyiségnek a hányadosa:

$$\eta = \frac{W_{\text{teljes}}}{Q_{\text{felvett}}} \tag{38}$$

Első ránézésre azt gondolhatnánk, hogy az előző feladatrészekben mindent meghatároztunk, ami a hatásfok kiszámításához szükséges. Ez azonban nem igaz, a következő okból: azok a Q_1, Q_2 és Q_3 mennyiségek amelyeket az előbb kiszámoltunk, az egyes szakaszok során a gázzal közölt (vagy általa leadott) *teljes* hőmennyiséget jelölik. Lehetséges azonban, hogy egy szakaszon a gáz fel is vett és le is adott hőt. Éppen ez a helyzet a 3. szakasz esetén, itt tehát az előző feladatrészben kiszámított Q_3 hő az ezen a szakaszon felvett, illetve leadott hő különbségeként adódik:

$$Q_3 = Q_{3,\text{felvett}} - Q_{3,\text{leadott}} \tag{39}$$

Jelen esetben a leadott hő a nagyobb, így ha a 3. szakasz egészét nézzük, akkor azt látjuk, hogy gáz hőt adott le, azonban ha részleteiben néznénk a folyamatot, akkor azt látnánk hogy a 3. szakasznak van egy olyan része, amikor hőt közlünk a gázzal. Ahhoz, hogy helyesen kapjuk meg a hatásfokot, ezt a 3. szakaszon felvett hőt is bele kellene számítanunk a nevezőbe, ennek meghatározásához azonban szükségünk lenne arra az információra, hogy a 3. szakasznak mekkora része alatt történik hőleadás és mekkora része alatt hőfelvétel (ehhez egyébként azt kellene megnéznünk, hogy hol van az a pont a szakaszon, amelyen áthaladó adiabatának az érintő egyenese éppen párhuzamos a 3. szakasszal).

5. feladat

(a) Tekintsünk először egyetlen részecskét, amelynek csupán két lehetséges állapota van: vagy az alsó dobozban van, vagy a felsőben, amely h magasságban található. Mekkora az energiája az első illetve a második esetben ($E_1 =?$, $E_2 =?$). Mekkora ekkor a Z kifejezés értéke? (Segítség: mivel a részecskének csak két állapota van, így Z csupán két tag összege).

A részecske egyik lehetséges állapota, hogy az alsó dobozban van, ekkor helyzeti energiáját vehetjük $E_1 = 0$-nak. A felső doboz ehhez képest h magasságban van, így itt a helyzeti energia $E_2 = mgh$. Mivel a részecskének csupán ez a két állapota van, így a Z-vel jelölt kifejezés értéke:

$$Z = e^0 + e^{-mgh/k_BT} = 1 + e^{-mgh/k_BT}. \tag{40}$$

(b) Mekkorák egyetlen részecske esetén a $p(E_1)$ illetve $p(E_2)$ valószínűségek? Mekkora az átlagos energia: $E_{\text{átl}} = p(E_1)E_1 + p(E_2)E_2 =?$

Felhasználva az előbbi eredményt és a feladat szövegében szereplő képletet az alsó- illetve felső dobozban való tartózkodás valószínűségeire a következőket kapjuk:

$$p(E_1) = \frac{e^0}{Z} = \frac{1}{1+e^{-mgh/k_BT}} \tag{41a}$$

$$p(E_2) = \frac{e^{-mgh/k_BT}}{Z} = \frac{e^{-mgh/k_BT}}{1+e^{-mgh/k_BT}} \tag{41b}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a valószínűségek összege 1. Az átlagos energiát a következőképpen kaphatjuk:

$$E_{\text{átl}} = p(E_1)E_1 + p(E_2)E_2 = p(E_2)E_2 = mgh\frac{e^{-mgh/k_BT}}{1+e^{-mgh/k_BT}} \tag{42}$$

(c) Milyen magasra rakjuk a felső dobozt ($h =?$), ha azt szeretnénk, hogy átlagosan a részecskék negyede tartózkodjon benne? (Segítség: használjuk ki, hogy a részecskék függetlenek és építsünk az előző feladatrész eredményére!)

Az előző feladatrész eredményeképpen megkaptuk, hogy mekkora egyetlen részecske átlagos energiája a h magasság függvényében, adott T hőmérsékleten. Mivel a részecskék egymástól függetlenek, így N darab részecske teljes energiája átlagosan $NE_{\text{átl}}$. Minden, a felső dobozban tartózkodó részecskére mgh energia jut, ezért az átlagosan fent tartózkodó részecskék száma:

$$n_{\text{átl}} = \frac{NE_{\text{átl}}}{mgh}. \tag{43}$$

Azt akarjuk, hogy $n_{\text{átl}} = N/4$ legyen. Beírva $E_{\text{átl}}$-nak az előző feladatrészben kapott eredményét egyszerűsíthetünk N-el és mgh-val egyaránt. Bevezetve az $\alpha = mgh/k_BT$ jelölést az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}} = \frac{1}{4} \tag{44}$$

Ezt beszorozva a baloldali kifejezés nevezőjével és egy oldalra rendezve az α-t tartalmazó tagokat:

$$\frac{3}{4}e^{-\alpha} = \frac{1}{4} \tag{45}$$

Beszorozva 4/3-al és véve mindkét oldal logaritmusát végeredményként ezt kapjuk:

$$\alpha = \frac{mgh}{k_BT} = \ln 3 \tag{46}$$

amiből kifejezhetjük a keresett magasságot:

$$h = \frac{k_BT\ln 3}{mg} \tag{47}$$