Dürer Verseny
MATEMATIKA FIZIKA KÉMIA

Fizikaverseny, Döntő, Elméleti forduló

2013. február 8.

1. feladat: **Az elszökő hélium**

   Több helyen hallhattuk, olvashattuk az alábbit: „A hélium kis móltömege miatt elszökik a Föld gravitációs teréből.” Ennek az állításnak járunk utána:

   (a) Mekkora hőmérsékletnek kellene uralkodnia a Földön ahhoz, hogy a hélium egyatomos molekuláinak sebessége az ekvipartició elve alapján elérje a szökési sebességet? ($T_{He} =?$)

   (b) Mivel magyarázható mégis az a tény, hogy hélium elszökik a légkörből?

   Megoldás:

   A szökési sebességet abban az esetben kapjuk, amikor a Földről kilőtt lövedék energiája nulla.

   $$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{sz}^2 - \frac{\gamma \cdot M_{Fold} m}{R} = 0 \tag{1}$$

   Ebből a szökési sebesség: $v_s z = 11,2 \frac{km}{s}$. A Hélium atom tömege: $m_{He} = 4 \frac{g}{6 \cdot 10^23} = 6,67 \cdot 10^{-27} kg$. A szabadsági fokok száma $f = 3$. Ahhoz, hogy az egy atomra jutó átlagos energia elérje a szökési energiát, teljesülnie kell a

   $$\frac{3}{2} \cdot k \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{sz}^2 \tag{2}$$

   Innen $T = 2 \cdot 10^5 K \gg 300K$.

   Az ekvipartíció-tétel azonban csak egy átlagos sebességértéket ad meg, az atomok egy kis részének ennél sokkal nagyobb sebessége is lehet, vagyis elérheti a szökési sebességet. Ha a legnagyobb energiájú részecskék elszöknek, akkor a gáz lehűl, de a Nap újra felmelegíti, így folyamatosan lesznek elszökő részecskék.

2. feladat: **A sétálás egyszerű modellje**

   Modellezzük a sétálást úgy, hogy az L hosszúságú, m tömegű lábunk egy egyenletes tömegeloszlású henger, melynek minden pontja, mindvégig vízszintes sebességgel mozog. A sétálás során két fázisát különböztessük meg a lábunknak: amikor a földön van, és amikor a levegőben! (A modellből a láb felemelése és letétele hiányzik. Azaz mind a két esetben a talpunk a földön felszínétől 0 távolságra van.) A lábunk földtől számított h magasságban lévő pontjának sebességét jelöljük $v_1(h)$-val, ha a lábunk a földön, és $v_2(h)$-val, ha a lábunk a levegőben van! Tegyük fel, hogy a csípőnk mindvégig egyenletes v_0 sebességgel mozog (a földhöz viszonítva)! (Azaz $v_1(L) = v_2(L) = v_0$.) Feltételezzük, hogy a lábunk mindvégig henger marad, és amikor a talpunk a földön van, akkor az nem mozog a földhöz képest ($v_1(0) = 0$).

   (a) Adjuk meg a levegőben illetve a földön lévő láb mozgását! ($v_1(h) =?$, $v_2(h) =?$)

   Jól látható, hogy $v_1(h) \leq v_2(h)\ \forall h \in [0, L]$. Tegyük fel, hogy a lábunk letételekor az ebből származó mozgási energia különbség (ΔE) elveszik! Ekkor a sétálás közbeni fáradásunkat ezen energia pótlása okozza. Kíváncsiák vagyunk, hogy a kétszer olyan gyors sétálás mennyivel fárasztóbb. Ehhez válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

   (b) Adjuk meg mennyi mozgási energiát vesztünk, a lábunk letételekor! ($\Delta E =?$)

   (c) Ha egy lépésünk s_0 hosszúságú, akkor mekkora átlagos teljesítményt jelent v_0 sebességgel sétálni? ($P(s_0, v_0) = ?$)

   (d) Mennyivel fárasztóbb kétszer olyan gyorsan sétálni? ($\frac{P(s_0,2v)}{P(s_0,v)} =?$)

Megoldás:

Mivel az idő felében a talpunk a földön van és az átlagsebessége v_0, így $v_2(0) = 2v_0$.
A talpunktól a csípőnkig a lábunk sebessége lineárisan változik. Ez abból következi, hogy lábunk mindvégig henger marad. (Ez már hasonlóságra visszavezethető.) Ekkor felírhatjuk $v_1(h)$ és $v_2(h)$ függvényeket!

$$v_1(h) = \frac{h}{L} v_0 \tag{3}$$

$$v_2(h) = \left(2 - \frac{h}{L}\right) v_0 \tag{4}$$

A lábunk egy vékony, h magasságban lévő, Δm tömegű víszintes szeletének energiája földön illetve levegőben lévő fázisban:

$$\epsilon_1(h) = \frac{1}{2}\Delta m v_1(h)^2 = \frac{1}{2}\Delta m \frac{h^2}{L^2} v_0^2 \tag{5}$$

$$\epsilon_2(h) = \frac{1}{2}\Delta m v_2(h)^2 = \frac{1}{2}\Delta m \left(4 - \frac{4h}{L} + \frac{h^2}{L^2}\right) v_0^2 \tag{6}$$

Így ezek különbsége:

$$\epsilon_2(h) - \epsilon_1(h) = 2\Delta m v_0^2 \left(1 - \frac{h}{L}\right) \tag{7}$$

Az egy lépésnél elvesztett energiát megkapjuk, ha összeadjuk a (7) egyenletben szereplő különbséget a lábunk minden „szeletére”. Ez az összegzés megegyezik a $2\frac{m}{L} v_0^2 \left(1 - \frac{h}{L}\right)$ függvény $[0, L]$ tartományán a függvény alatti területtel. Ez egy derékszögű háromszög, melynek befogói $2\frac{m}{L} v_0^2$ és L. Így területe, azaz az egy lépésnél elvesztett energia:

$$\Delta E = m v_0^2 \tag{8}$$

Egy s_0 hosszú utat $\frac{s_0}{v_0}$ idő alatt teszünk meg, avagy 1 másodperc alatt $\frac{v_0}{s_0}$ darabot lépünk. Így a v_0 sebességgel való haladáshoz szükséges átlagos teljesítmény:

$$P(s_0, v_0) = \frac{m v_0^3}{s_0} \tag{9}$$

Tehát a kétszer gyorsabb sétálás nyolcszor fárasztóbb.

3. feladat: **Értsük meg az ősrobbanást!**

Az általános relativitáselmélet és a Hubble-törvény felfedezése óta tudjuk, hogy az univerzum nem statikus, hanem tágul. Ezt a tágulást azonban a Newton-féle gravitációs törvény alapján is megérthetjük, ehhez csak két dolgot kell tudnunk:

- Egy tömör gömb gravitációs terét a gömbön kívül tekinthetjük úgy, mintha a gömb teljes tömege a középpontjában koncentrálódna
- Egy vékony gömbhéj belsejében a gravitációs erő nulla (ez hasonló ahhoz, mint ahogy egy töltött fémdobozon belül is árnyékolódik az elektrosztatikus tér, azzal a különbséggel, hogy az elektromosság esetében ez a hatás nem függ a doboz alakjától, a gravitációnál viszont csak gömbhéjra igaz).

Nagy léptékben nézve az univerzum sűrűsége mindenhol azonos, legyen ennek értéke ϱ! Feltehetjük, hogy a sűrűség a tágulás során homogén módon változik, és tömeg nem vész el. Tekintsünk egy galaxist, mely $t = 0$ pillanatban a Földtől R távolságban van, és (a Földhöz viszonyítva) v_0 sebességgel halad!

(a) A Földről mérve mekkora lesz a gyorsulása? ($a(t = 0) =?$)

(b) Mi köze van ennek a földfelszínről függőlegesen kilőtt ágyúgolyóhoz?

(c) Mitől függ, hogy milyen messzire juthat el a galaxis?

(d) Rajzoljuk le (hozzávetőlegesen) R időbeli változását a különböző esetekre!

Megoldás:

Osszuk fel az extragalaktikus teret egy Tejútrendszer középpontú, R sugarú gömbre és az azon kívüli részre. A gömbhéj menti gravitációs tér számolásánál a gömbön belüli tömeget a középpontba képzelhetjük, a külső rész járuléka pedig nulla. A gömbön belüli teljes tömeg

$$M_{belül} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{10}$$

A Newton-törvény alapján a galaxis gyorsulása

$$a = -\gamma \frac{M_{belül}}{R^2} \tag{11}$$

Ez megegyezik a Földről fellőtt ágyúgolyó gyorsulásával, ha M_{belul}-t a Föld tömegével helyettesítjük.

Hasonlóan ahhoz, ahogy az ágyúgolyó vagy elszáll a végtelenbe vagy visszaesik ránk, az univerzum is vagy a végtelenségig tágul vagy a tágulás egyszercsak átcsap összehúzódásba. A két lehetőséget a galaxis összenergiájának előjele különbözteti meg.

4. feladat: **Galilei-hőmérő gyártása**

A Galilei-hőmérő egy vízzel töltött henger, amiben azonos térfogatú, különböző tömegű, üveg falú gömbök úsznak. A gömbök átmérője $d = 2$ cm. A hőmérő működési elve: melegítés hatására a víz kitágul, sűrűsége lecsökken, így a nagyobb tömegű gömbök lesüllyednek. Az aktuális hőmérsékletet a még úszó gömbökre írt hőmérsékletek közül a legkisebb adja. Szeretnénk megtudni, hogy az 1 °C pontosságú Galilei-hőmérő gyártásánál mennyire pontosan kell kimérni a gömbök m tömegét! Ehhez válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket!

(a) Mi teljesül a gömb m tömegére, ha T hőmérsékleten még úszik a ϱ_1 sűrűségű vízen? ($m <?$)

(b) Mennyi a víz sűrűsége ($T + 1$ K) hőmérsékleten? ($\varrho_2 =?$)

(c) Mi teljesül a gömb m tömegére, ha ($T + 1$ K) hőmérsékleten lesüllyed? ($m >?$)

(d) A fentiek alapján mennyinek kell lennie legalább a tömegmérés pontosságának? ($\Delta m =?$)

Az alábbi értékeket csak az utolsó kérdésnél helyettesítsük be! A víz sűrűsége T hőmérsékleten: $\varrho_1 = 1\ \frac{g}{cm^3}$, a víz térfogati hőtágulási együtthatója: $\beta_{víz} = 2 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$, az üvegé: $\beta_{üveg} = 5 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$.

Megoldás:

Jelöljük a hideg üveggömb térfogatát $V_{h,üveg}$-gel! Akkor úszik a test, ha a teljes térfogata által kiszorítható víz tömege nagyobb a test tömegénél, így:

$$m < V_h \cdot \varrho_1 \tag{12}$$

Vegyünk M tömegű, T hőmérsékletű vizet! Ennek térfogata: $V_{h,víz} = \frac{M}{\varrho_1}$. A ($T + 1$ K) hőmérsékletű M tömegű víz térfogatát jelöljük $V_{m,víz}$-zel! Ekkor felírható a következő egyenlet:

$$\varrho_2 = \frac{M}{V_{m,víz}} = \frac{M}{V_{h,víz} \cdot (1 + 1\mathrm{K} \cdot \beta_{víz})} = \frac{\varrho_1}{(1 + 1\mathrm{K} \cdot \beta_{víz})} \tag{13}$$

Az egy fokkal melegebb üveggömb térfogata: $V_{m,\text{üveg}} = V_{h,\text{üveg}}(1 + \beta_{\text{üveg}} \cdot 1\text{K})$. Ez a gömb akkor süllyed le, ha az általa kiszorított (melegebb) víz tömege kisebb, mint a gömb tömege. Tehát:

$$m > V_{m,\text{üveg}} \cdot \varrho_2 \tag{14}$$

$$m > V_{h,\text{üveg}} \cdot (1 + \beta_{\text{üveg}} \cdot 1\text{K}) \frac{\varrho_1}{1 + \beta_{víz} \cdot 1\text{K}} \tag{15}$$

Így a tömegmérés pontosságának legalább:

$$\Delta m = V_{h,\text{üveg}} \cdot \varrho_1 \frac{1 + 1\text{K} \cdot \beta_{\text{üveg}}}{1 + 1\text{K} \cdot \beta_{víz}} \approx 8,2 \cdot 10^{-4}\text{g} \tag{16}$$

5. feladat: **Húrelmélet**

Hogyan is fest a világ a részecskefizikusok számára? Közismert tény, hogy világunkban az anyag atomokból áll. Az atom magját protonok és neutronok alkotják, a mag körül pedig elektronok keringenek. A proton és a neutron viszont nem elemi részecskék, mindkettő kvarkokból áll. Az elemi részecskék, vagyis a kvarkok, az elektron, az ún. neutrínók tulajdonságait, a térben való mozgásukat és kölcsönhatásaikat egy bonyolult matematikai elmélet írja le, amit a részecskefizikusok Standard Modellnek hívnak.

A Svájc és Franciaország határán elhelyezkedő, Large Hadron Collidernek nevezett részecskegyorsítóban éppen igen nagy áttörést értek el a kísérleti fizikusok. A kör alakú, 27 km kerületű LHC-ben proton nyalábokat gyorsítanak gyakorlatilag fénysebességre. A részecskéket mágneses térrel tartják körpályán, amit szupravezető mágnesek biztosítanak. Végül az egymással szembe haladó részecskéket ütköztetik. (A két ütköző proton együttes energiája maximálisan 14 TeV.) Az ütközés során létrejött új részecskék között most sikerült megtalálni a Standard Modell utolsó, eddig nem látott részecskéjét, a Higgs-bozont.

A Standard Modellből azonban minden kísérleti sikere ellenére hiányzik valami nagyon alapvető: a gravitációs kölcsönhatás. A gravitáció beépítése a Standard Modellbe ugyanis igen komoly matematikai problémákhoz vezet. Egy szemléletes kép alapján közelítőleg nehéz matematika nélkül is megérthetjük, hol jelentkeznek a furcsaságok.

Az LHC energiaskáláján a részecskék közötti gravitációs kölcsönhatás még teljesen elhanyagolható. Azonban ahogy egyre nagyobb energiájú ($E_{\text{ütk}}$) részecskegyorsítókat építünk, egyre kisebb távolságskálákon (a) tudjuk feltérképezni az anyag szerkezetét. (A két skálát az $a = \hbar \cdot c / E_{\text{ütk}}$ képlet kapcsolja össze, ahol $\hbar$ a Planck-állandó 2π-ed része és c a fénysebesség.) Ilyen módon az ütközésnél egyre nagyobb energiát tudunk belesűríteni egyre kisebb térfogatba. Azonban a gravitációs elméletekben ezt a sűrítést nem folytathatjuk a végtelenségig, ugyanis ezekben az elméletekben léteznek fekete lyukak. Ezek olyan tértartományok, amikben a gravitáció annyira erős, hogy már a fény sem tud belőlük kiszabadulni. Ha $M = E_{\text{ütk}}/c^2$ tömegű anyag az $R = 2 \cdot G \cdot M/c^2$ sugáron (G itt a Newtoni gravitációs állandó) belülre kerül, akkor az anyag fekete lyukká esik össze.

(a) Hol van az az E_P energiaskála, ahol $a = R$? (Az eredményt TeV-ban add meg.) Hogyan viszonyul ez az LHC energiaskálájához?

Valószínűleg nagyon érdekes dolgok játszódnak le ezen az E_P energiaskálán, ahol a gravitácó és az elemi részecskék fizikája találkozik. Egyes fizikusok azt gondolják, hogy az fog kiderülni: az anyag fundamentális alkotói végső soron nem is pontszerű elemi részecskék, hanem nagyon kicsi egy dimenziós húrok. Amiket mi különböző elemi részecskéknek látunk, azok azonos húrok különböző rezgési mintázatai. (Ez hasonlít egy kicsit ahhoz, ahogy egy gitárhúr különböző rezgéseit is egészen más hangoknak halljuk.) Sok más fizikus viszont szkeptikus, hiszen az elméletet nem tudjuk méréssel ellenőrizni.

Egy kísérleti fizikusnak $0.5 \cdot E_P$ energiájú részecskenyalábokat kell előállítania ahhoz, hogy a hipotetikus húrokat közvetlenül tanulmányozni tudja. A következőkben azt szeretnénk meghatározni, hogy mekkora sugarúnak kell lennie egy olyan új szupergyorsítónak, amiben az LHC-vel azonos erősségű mágneses tér alkalmazásával körpályán tudjuk tartani ezeket a nagy energiájú részecskéinket.

(b) Írd fel a $\Delta\vec{p}/\Delta t = \vec{F}$ Newton-törvényt a körpályán mozgó protonokra. Fejezd ki a pályasugarat (r) a részecske energiájával (E) és a mágneses tér erősségével (B). Vigyázat! Az $E = 1/2 \cdot m \cdot \vec{v}^2$ és a $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ képletek csak lassú részecskékre érvényesek. A fénysebességgel menő részecskékre ehelyett $E = p \cdot c$ teljesül.

(c) Az LHC adatainak ismeretében add meg az új gyorsító szükséges sugarát.

(d) Egy galaxis átmérője körülbelül 100 000 fényév. Vajon mit keres itt ez az adat? A szupergyorsító beindítása után legalább mennyi időt kell várni az első ütközésig?

Megoldás:

Az E_P energiájú gyorsító $a = \hbar \cdot c/E_P$ távolságskálán vizsgálja a fizikai jelenségeket. Az energiaskálához tartozó fekete lyuk sugara $R = 2 \cdot G \cdot E_P/c^4$, a kettőt egyenlővé téve E_P kifejezhető:

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{2 \cdot G}} = 8,64 \cdot 10^{15}\, TeV \tag{17}$$

A szupergyorsító sugarának meghatározásához írjuk föl Newton-törvényét: $\Delta\vec{p}/\Delta t = \vec{F}$. A körpályán mozgó protonok $\vec{p}$ impulzusának nagysága állandó, iránya viszont változik. Egy kis Δt idő alatt az impulzusvektor $\omega \cdot \Delta t$ szöggel fordul el. Az impulzus megváltozása $\Delta p = p \cdot \omega \cdot \Delta t$. A B mágneses térhez tartozó erő: $F = e \cdot v \cdot B$. Tehát a Newton-törvény:

$$p \cdot \omega = e \cdot v \cdot B \tag{18}$$

Vigyázat! Az egyenlet bal oldalára most nem írhatunk $m\frac{v^2}{r}$-et, mivel $p = m \cdot v$ csak a lassan menő részecskékre igaz. Az egyenletet ω-val osztjuk, majd a (lényegében) fénysebességgel menő protonokra érvényes $E = p \cdot c$ összefüggést is felhasználjuk.

$$E = e \cdot c \cdot B \cdot r \tag{19}$$

Konstans mágneses tér esetén tehát a proton energiájával arányosan kell növelnünk a gyorsító sugarát. Az LHC sugara $r_{LHC} = 27km/2\pi$, az ehhez tartozó proton energia $7TeV$. Az új szupergyorsítóban a proton energiája $0.5 \cdot E_P$, ez alapján a sugár:

$$r_{uj} = 2.65 \cdot 10^{15}\, km \tag{20}$$

Ez fényévben kifejezve: $r_P = 280ly$, ami kevesebb, mint 3 nagyságrenddel kisebb csak egy galaxis méreténél. Ha azt feltételezzük, hogy a részecskéket egy félkör megtétele alatt gyorsítjuk fel, akkor $\pi \cdot r_P = 880ly$, tehát 880 év telik el az ütközésig.