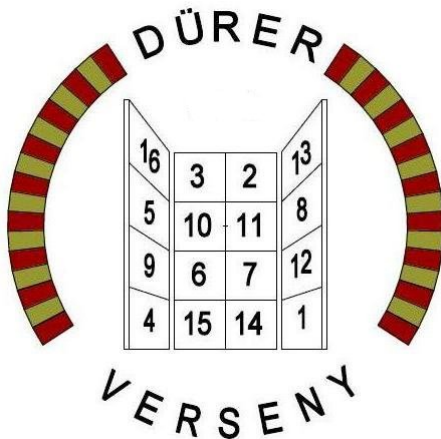


Válogatás a Dürer Verseny feladataiból

Hujter Bálint, Szűcs Gábor

Javított verzió

2013. július 3.



Miről lesz szó?

- 1 Mese a versenyről
- 2 A feladatsorok születése
- 3 A feladatok megoldása

Feladatlapok

- Az első négy feladatot beszéljük meg.
- A többi feladat megoldása:

durereinformatika.hu/aktualis/ratz-laszlo-2013.html

- Kérdések.
- Gondolkozni szabad!



Béldorok, 2013. június 3. 53. Rátz László Vándorgyűlés

Válogatás a Dürer Verseny feladataiból

I.

1. Kupido és Amor a következő játékkal töltek el az időt: 6 ember közül felváltva kettős-kettős egymásba húsoztak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szereiméből egy szereimi háromszöget. A szereim kölcsönös, a szereimi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szereimbe egymásba. Hányféle Kupido vagy Amor lehet, és hányféle a feladat megoldása?

Lehetőség, hogy a játékosok döntés, azaz bármely két ember szereimbe egymásba, de sem Kupido, sem Amor nem nyert?

(II. Dürer Verseny, Döntő, 2009, 7-8. osztályosoknak)

2. Az ideális feladatosság egy csoportján 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkiével egyszer játszik. Győzelmet 3, vereséget 0, döntetlent 1 pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pontkülönbség dönt). Az egyik csapat edzője a bajnokos megelégedés előtt a következőket írta a táblára:

1. Ha legkevesebb a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.
2. Legkevesebb a pontot el kell érniük, hogy legyen esélyünk továbbjutni.
3. A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c.
4. d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.

Mennyi a, b, c és d értéke, ha az edző nem hibázott?

(VI. Dürer Verseny, Levelező, 2011, 7-8. osztályosoknak)

3. Adott egy tizen számrendszerbeli irracionalitás szám táblázatát alább. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden számjegye közti legkevesebb k számjegyet szorozunk be. Igazadjuk, hogy megváltoztatjuk k-t úgy, hogy a fenti művelet végrehajtása minden irracionalitás számot racionális tehetünk. Mi a k lehető legkevesebb értéke, amellyel ezt meg elérhetjük?

(IV. Dürer Verseny, Döntő, 2011, 11-12. osztályosoknak)

4. Le lehet-e felírni egy 2010 × 2010-es négyzetet, a tetrisből ismert L-tetrisből? És egy 2010 × 2012-es téglalapot T-tetrisből?

(III. Dürer Verseny, Döntő, 2010, 11-12. osztályosoknak)

Célok

- A matematika szép.

Célok

- A matematika szép.
- Csapatverseny.
- Legyenek lányok.

Célok

- A matematika szép.
- Csapatverseny.
- Legyenek lányok.
- Alakuljon ki egy közösség.
- Színvonalas szabadidős programok.
- Önkéntes, egyetemista szervezők.

Célok

- A matematika szép.
- Csapatverseny.
- Legyenek lányok.
- Alakuljon ki egy közösség.
- Színvonalas szabadidős programok.
- Önkéntes, egyetemista szervezők.
- Miért Dürer?

Helyszínek, személyek



- Földes Ferenc Gimnázium



Helyszínek, személyek



- Földes Ferenc Gimnázium
- Farkas Ádám, Szedlák Máté
- megyei → regionális → országos



Helyszínek, személyek



- Földes Ferenc Gimnázium
- Farkas Ádám, Szedlák Máté
- megyei → regionális → országos
- 6 kategória, 250 résztvevő, 45 szervező

Helyszínek, személyek



- Földes Ferenc Gimnázium
- Farkas Ádám, Szedlák Máté
- megyei → regionális → országos
- 6 kategória, 250 résztvevő, 45 szervező
- Támogatók:
MOL, ELMŰ,
Pro Progressio Alapítvány,
Bolyai Társulat,
Abaújterv Bt.

Szervezők – 2013



Szervezők – 2011



Szervezés

Munkacsoportok:

- matek, fizika, kémia
- szabadidő
- mentorok
- informatika
- adminisztráció
- pályázatfelelős

Szervezés

Munkacsoportok:

- matek, fizika, kémia
- szabadidő
- mentorok
- informatika
- adminisztráció
- pályázatfelelős



Szervezés

Munkacsoportok:

- matek, fizika, kémia
 - szabadidő
 - mentorok
 - informatika
 - adminisztráció
 - pályázatfelelős
- találkozók: felelősök, mcs csoportok, mindenki
kb. 20 találkozó
 - levelezési listák
kb. 10 különböző lista, kb. 2000 e-mail évente
 - Van-e értelme?



Hogyan néz ki a döntő?



• mentorok



Hogyan néz ki a döntő?



- mentorok
- akadályverseny



Hogyan néz ki a döntő?



- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár



Hogyan néz ki a döntő?



- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár
- licit



Hogyan néz ki a döntő?



- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár
- licit
- előadások

Hogyan néz ki a döntő?



- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár
- licit
- előadások
- visszajelzések

A matekverseny felépítése

A versenyt 4 kategóriában hirdetjük meg:

- A kategória: 5-6. osztályosok (Borsod–Abaúj–Zemplén)
- B kategória: 7-8. osztályosok (+ Heves, Szabolcs–Szatmár–Bereg)
- C kategória: 9-10. osztályosok (országos)
- D kategória: 11-12. osztályosok (országos)

A matekverseny felépítése

A versenyt 4 kategóriában hirdetjük meg:

- A kategória: 5-6. osztályosok (Borsod–Abaúj–Zemplén)
- B kategória: 7-8. osztályosok (+ Heves, Szabolcs–Szatmár–Bereg)
- C kategória: 9-10. osztályosok (országos)
- D kategória: 11-12. osztályosok (országos)

Fordulók:

- Levelező forduló – ősszel
- Döntő a Földesben (Miskolc) – február
 - Péntek: 5 feladat (indoklással leírva) + 1 stratégiás játék
 - Szombat: váltóverseny

Életképek a versenyről



Életképek a versenyről



Életképek a versenyről



Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
→ Feladatgyűjtő találkozók

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
→ Feladatgyűjtő találkozók
- Minél több feladatot mi magunk találjunk ki
– egyelőre kevésbé működik, helyette szép versenyfeladatok átalakítása

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
→ Feladatgyűjtő találkozók
- Minél több feladatot mi magunk találjunk ki
– egyelőre kevésbé működik, helyette szép versenyfeladatok átalakítása
- Ha mégis mi találunk ki: általában egyetemen tanulmányaink (kutatásaink) motiválják

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
→ Feladatgyűjtő találkozók
- Minél több feladatot mi magunk találjunk ki
– egyelőre kevésbé működik, helyette szép versenyfeladatok
átalakítása
- Ha mégis mi találunk ki: általában egyetemen tanulmányaink
(kutatásaink) motiválják

Matek mcs. extra "haszna": kapcsolatépítés

Feladatok megbeszélése következik.

1. feladat

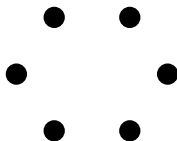
Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkal!

Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?

1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelővel!

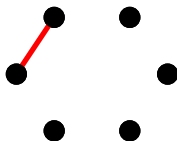
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelővel!

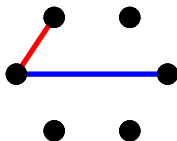
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelővel!

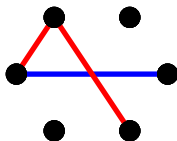
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkal!

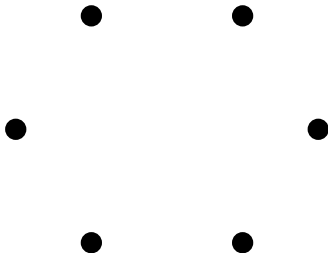
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

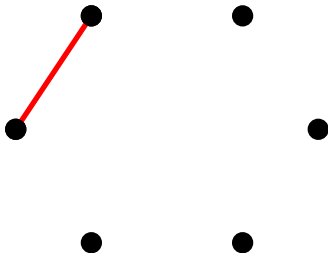


Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

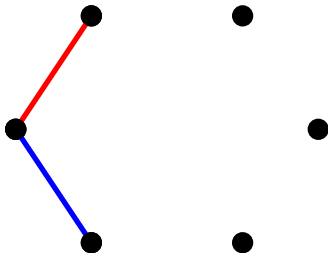


Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

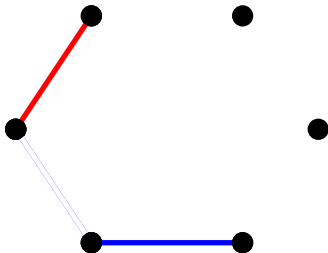


Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.



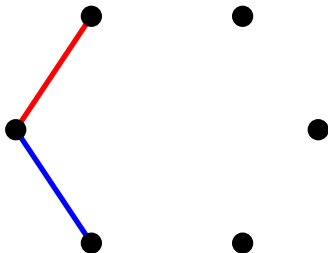
Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

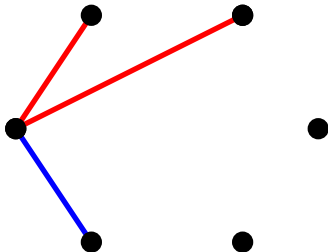


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

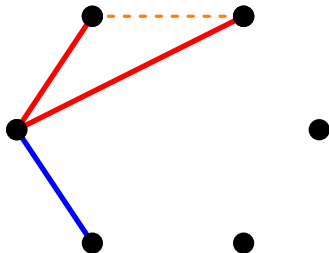


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

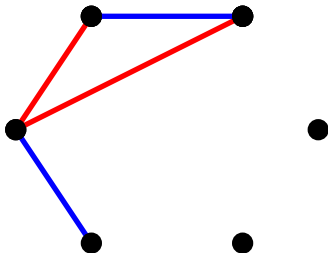


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

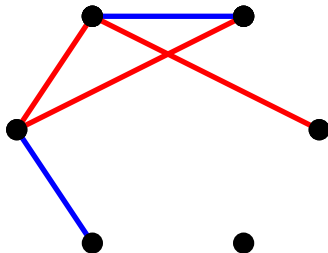


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

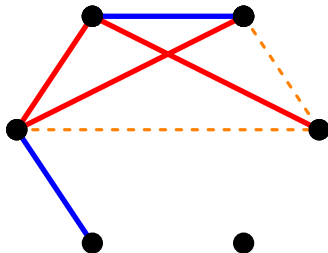


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

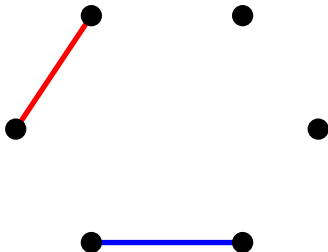
Első eset: az első két behúzott él szomszédos



1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

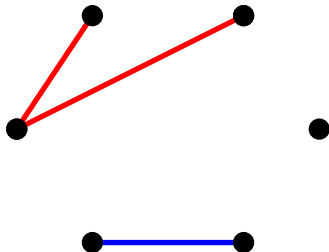


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

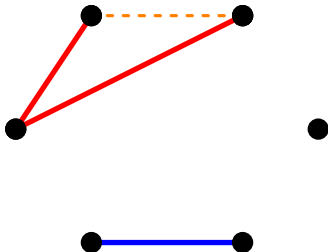


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

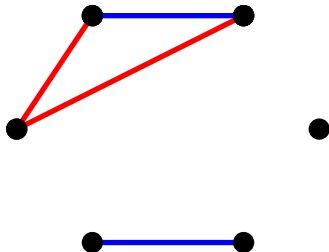


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

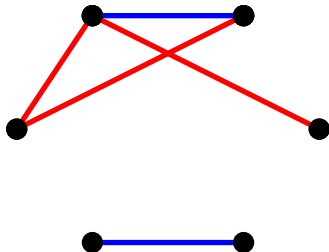


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

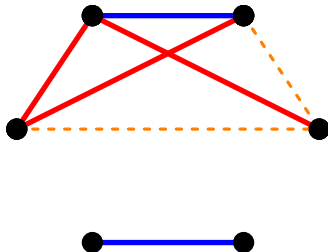


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

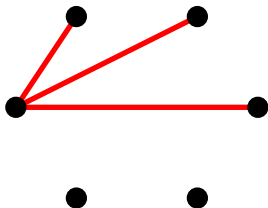
Második eset: az első két behúzott él diszjunkt



Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

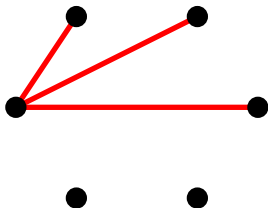
Lehet-e döntetlen? Nem.



- 1 Vegyünk egy tetszőleges csúcsot.
- 2 Innen 5 él indul, ezek közt van 3 egyszínű (pl. piros).
- 3 Ha nincs piros háromszög, akkor a 3 végpont közt csupa kék él megy $\Rightarrow$ együtt egy kék háromszög.

1. feladat

Lehet-e döntetlen? Nem.



- 1 Vegyünk egy tetszőleges csúcsot.
- 2 Innen 5 él indul, ezek közt van 3 egyszínű (pl. piros).
- 3 Ha nincs piros háromszög, akkor a 3 végpont közt csupa kék él megy $\Rightarrow$ együtt egy kék háromszög.

Ez a legegyszerűbb (de már érdekes) kérdése az ún.

Ramsey-elméletnek, amely a kombinatorika egy klasszikus, de még ma is nagy erővel kutatott kérdésköre.

1. feladat – egy érdekes csatlakozó kérdés

Láttuk: előbb-utóbb biztos lesz egyszínű háromszög.

Kérdés (Jenei Dániel)

*Kinek van nyerő stratégiája, ha **az veszít**, aki az első egyszínű háromszöget létrehozza?*

Igazából érdekes lenne: valami jól megfogható, szépen elmondható stratégia (nyitott)

2. feladat

Az iskolai focibajnokság egy csoportjában 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért 3, vereségért 0, döntetlenért 1 pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pénzfeldobással döntenek). Az egyik csapat edzője a bajnokság megkezdése előtt a következőket írta a táblára:

- 1 Ha legalább a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.
- 2 Legalább b pontot el kell érünk, hogy legyen esélyünk továbbjutni.
- 3 A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c .
- 4 d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.

Mennyi a , b , c és d értéke, ha az edző nem hibázott?

2. feladat

1 ponttal mindenképpen kiesünk, hiszen ehhez legalább 2 meccset el kellett veszítenünk (különben legalább 2 pontunk lenne).
Aki legyőzött minket, annak legalább 3 pontja van.

2. feladat

1 ponttal mindenképpen kiesünk, hiszen ehhez legalább 2 meccset el kellett veszítenünk (különben legalább 2 pontunk lenne).

Aki legyőzött minket, annak legalább 3 pontja van.

Másrészt 2 ponttal már tovább lehet jutni (szerencsés esetben).

csapat	HUN	POL	CZR	SVK	Gy-D-V	Pont
Magyarország	—	1-0	1-0	1-0	3-0-0	9
Csehország	0-1	—	0-0	0-0	0-2-1	2
Lengyelország	0-1	0-0	—	0-0	0-2-1	2
Szlovákia	0-1	0-0	0-0	—	0-2-1	2

2. feladat

1 ponttal mindenképpen kiesünk, hiszen ehhez legalább 2 meccset el kellett veszítenünk (különben legalább 2 pontunk lenne).

Aki legyőzött minket, annak legalább 3 pontja van.

Másrészt 2 ponttal már tovább lehet jutni (szerencsés esetben).

csapat	HUN	POL	CZR	SVK	Gy-D-V	Pont
Magyarország	—	1-0	1-0	1-0	3-0-0	9
Csehország	0-1	—	0-0	0-0	0-2-1	2
Lengyelország	0-1	0-0	—	0-0	0-2-1	2
Szlovákia	0-1	0-0	0-0	—	0-2-1	2

Tehát: $b = 2, d = 1$.

2. feladat

7 ponttal mindenképpen továbbjutunk, hiszen ehhez legalább 2 győzelem kell (különben legfeljebb $3+1+1=5$ pontunk lenne)
Akiket legyőztünk, azoknak legfeljebb 6 pontja lehet.

2. feladat

7 ponttal mindenképpen továbbjutunk, hiszen ehhez legalább 2 győzelem kell (különben legfeljebb $3+1+1=5$ pontunk lenne)
Akiket legyőztünk, azoknak legfeljebb 6 pontja lehet.

Másrészt 6 ponttal ki lehet esni (peches esetben):

(Foci VB, 1994, D csoport)

csapat	NIG	BUL	ARG	GRE	Gy-D-V	Pont
Nigéria	—	3-0	1-2	2-0	2-0-1	6
Bulgária	0-3	—	2-0	4-0	2-0-1	6
Argentína	2-1	0-2	—	4-0	2-0-1	6
Görögország	0-2	0-4	0-4	—	0-0-3	0

2. feladat

7 ponttal mindenképpen továbbjutunk, hiszen ehhez legalább 2 győzelem kell (különben legfeljebb $3+1+1=5$ pontunk lenne)
Akiket legyőztünk, azoknak legfeljebb 6 pontja lehet.

Másrészt 6 ponttal ki lehet esni (peches esetben):

(Foci VB, 1994, D csoport)

csapat	NIG	BUL	ARG	GRE	Gy-D-V	Pont
Nigéria	—	3-0	1-2	2-0	2-0-1	6
Bulgária	0-3	—	2-0	4-0	2-0-1	6
Argentína	2-1	0-2	—	4-0	2-0-1	6
Görögország	0-2	0-4	0-4	—	0-0-3	0

Tehát: $a = 7, c = 6$.

Jó-e ez a megoldás?

A válasz helyes, de az indoklással kapcsolatban fellép egy kétely:

Jó-e ez a megoldás?

A válasz helyes, de az indoklással kapcsolatban fellép egy kétely:
megmutattuk, hogy 6 ponttal *ki lehet esni*,
azaz 6 ponttal *nem lehetünk biztos továbbjutók*.
De miért nem lehetséges – bármilyen furcsán hangzik is –
hogy 5 ponttal biztos továbbjutunk?
Mielőtt valaki legyintene e képtelen felvetésre...

2. feladat módosítás

...változtassuk kicsit a feltételeken:

- 4 csapatból az első 3 jut tovább
- Győzelemért 4, döntetlenért 3, vereségért 0 pont.

2. feladat módosítás

...változtassuk kicsit a feltételeken:

- 4 csapatból az első 3 jut tovább
- Győzelemért 4, döntetlenért 3, vereségért 0 pont.

Állítás

*8 ponttal biztosan továbbjutunk, **de** 9 ponttal ki lehet esni.*

2. feladat módosítás

...változtassuk kicsit a feltételeken:

- 4 csapatból az első 3 jut tovább
- Győzelemért 4, döntetlenért 3, vereségért 0 pont.

Állítás

*8 ponttal biztosan továbbjutunk, **de** 9 ponttal ki lehet esni.*

Az eredeti feltételekkel szerencsére ez az anomália nem fordulhat elő, de a bizonyításban körültekintőbbnek kell lennünk.

A bizonyítás rendezése

Meg kell mutatni, hogy:

- Minden ≥ 7 lehetséges pontszámmal biztosan továbbjutunk.
- 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 ponttal egyaránt ki lehet esni (példák).
- 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 ponttal egyaránt tovább lehet jutni* (példák).
- 0 és 1 ponttal is biztosan kiesünk.

*8 pontot pedig nem is lehet szerezni.

4. feladat

Le lehet-e fedni egy 2010×2010 -es négyzetet, a tetriseből ismert L -betűkkel?

És egy 2010×2012 -es téglalapot T -betűkkel?

Általánosabban

Melyek azok a téglalapok, amelyeket lefedhetünk a tetriseből ismert L -betűkkel?

Melyek azok a téglalapok, amelyeket lefedhetünk a tetriseből ismert T -betűkkel?

4. feladat

L-betűk

Kezdjük két egyszerű megfigyeléssel.

Állítás

Ha egy téglalapot le tudunk fedni L-betűkkel, akkor a téglalap területe osztható 4-gyel.

Állítás

Egy 2×4 -es téglalap lefedhető L-betűkkel.



4. feladat

L-betűk

Mit tudunk eddig?

4. feladat

L-betűk

Mit tudunk eddig?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	?	?	?	...
2y	x	?	+	+	+	...
4z	?	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

4. feladat

L-betűk

Mit tudunk eddig?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	?	?	?	...
2y	x	?	+	+	+	...
4z	?	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

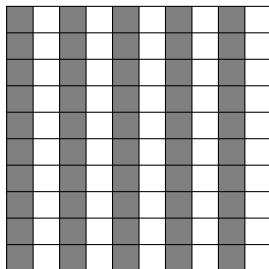
Kérdések:

- Lefedhető-e egy $4k$ területű téglalap L -betűkkel?
- Lefedhető-e egy páratlan oldalú téglalap L -betűkkel?

4. feladat

L-betűk

Ötlet: **színezés**



- "fehér" dominók (3 fehér, 1 fekete)
- "fekete" dominók (1 fehér, 3 fekete)
- összesen ugyanannyi fehér és fekete mező van →
- ugyanannyi "fehér" és "fekete" dominó van →
- a téglalap területe osztható 8-cal

4. feladat

L-betűk

Mit tudunk most?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	+	+	+	...
4z	x	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Kérdések:

- Lefedhető-e egy $4k$ területű téglalap L-betűkkel?
NEM
- Lefedhető-e egy páratlan oldalú téglalap L-betűkkel?

4. feladat

L-betűk

Mit tudunk most?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	+	+	+	...
4z	x	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Kérdések:

- Lefedhető-e egy $4k$ területű téglalap L-betűkkel?
NEM
- Lefedhető-e egy páratlan oldalú téglalap L-betűkkel?
IGEN

4. feladat

L-betűk

Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a $3 \times 8, 5 \times 8, 7 \times 8, \dots$ téglalapokat le tudjuk fedni:

4. feladat

L-betűk

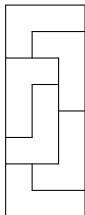
Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a 3×8 , 5×8 , $7 \times 8, \dots$ téglalapokat le tudjuk fedni:



3×8

4. feladat

L-betűk

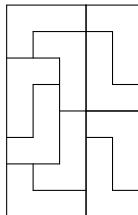
Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a 3×8 , 5×8 , 7×8 , ... téglalapokat le tudjuk fedni:



3×8

5×8

4. feladat

L-betűk

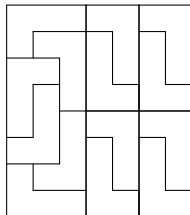
Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a 3×8 , 5×8 , 7×8 , ... téglalapokat le tudjuk fedni:



$$3 \times 8$$

$$5 \times 8$$

$$7 \times 8$$

4. feladat

L-betűk

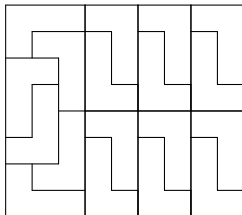
Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a 3×8 , 5×8 , 7×8 , ... téglalapokat le tudjuk fedni:



$$3 \times 8$$

$$5 \times 8$$

$$7 \times 8$$

$$9 \times 8$$

4. feladat

T-betűk

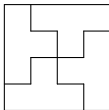
Mi a helyzet T -betűk esetén?

4. feladat

T-betűk

Mi a helyzet T -betűk esetén?

Egyszerűen fedhetünk egy 4×4 -es négyzetet:



Tehát minden $4k \times 4l$ -es négyzetet le tudunk fedni.

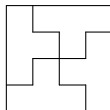
4. feladat

T-betűk

Mi a helyzet T -betűk esetén?

Mit tudunk a másik irányból?

Egyszerűen fedhetünk egy 4×4 -es négyzetet:



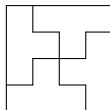
Tehát minden $4k \times 4l$ -es négyzetet le tudunk fedni.

4. feladat

T-betűk

Mi a helyzet T -betűk esetén?

Egyszerűen fedhetünk egy 4×4 -es négyzetet:



Tehát minden $4k \times 4l$ -es négyzetet le tudunk fedni.

Mit tudunk a másik irányból?

- A színezés most is segít. Az előző gondolatmenetet alkalmazhatjuk, sakktábla színezésre.
- Ezért egy T -betűvel fedhető téglalap területe osztható 8-cal.

4. feladat

T-betűk

Összefoglalva

4. feladat

T-betűk

Összefoglalva

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	?	?	?	...
4z	x	?	+	+	+	...
8v	?	?	+	+	+	...
16w	?	?	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

4. feladat

T-betűk

Összefoglalva

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	?	?	?	...
4z	x	?	+	+	+	...
8v	?	?	+	+	+	...
16w	?	?	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- Radnai András kérdése
- 2 évig gondolkoztunk
- a válasz ismert (Walkup, 1965)

3.0. feladat

Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé **pontosan** 1 számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy a fenti művelet segítségével egy irracionális számot nem lehet racionálissá tenni.

3.0. feladat

Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé **pontosan** 1 számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy a fenti művelet segítségével egy irracionális számot nem lehet racionálissá tenni.

3. feladat

Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé legfeljebb k számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy megválaszthatjuk k -t úgy, hogy a fenti művelet segítségével minden irracionális számot racionálissá tehetünk. Mi a k lehető legkisebb értéke, amellyel ezt még elérhetjük?

3.0. feladat

Legyen egy irracionális szám az

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Szúrjunk minden jegye közé egy-egy számjegyet:

$$a' = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

3.0. feladat

Legyen egy irracionális szám az

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Szúrjunk minden jegye közé egy-egy számjegyet:

$$a' = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

Tfh a' racionális. Ekkor olyan $2k$ hosszú szakasz, ami ismétlődik.
Ekkor az ismétlődő részben minden x -re teljesül, hogy

$$a_x = a_{x+k} \quad \text{és} \quad b_x = b_{x+k}.$$

Ekkor a -ban k -as periódust kaptunk. Ellentmondás.

3. feladat

Meglepő, hogy tudunk rá válaszolni. Legyen $k = 18$. Ekkor tetszőleges számot racionálissá tehetünk, sőt!

$$a = 0, \textcolor{red}{3709345829} \dots$$

Szűrjünk be jegyeket az alábbi módon:

$$a' = 0, \textcolor{blue}{0123} \textcolor{red}{456789} | \textcolor{blue}{01234567} \textcolor{red}{89} | \textcolor{blue}{0123456789} | \textcolor{blue}{0123456789} \dots$$

Jobban meggondolva elég 9 jegyet beszűrünk.

$$a'' = 0, \textcolor{blue}{0123456789} \textcolor{red}{0123456789} \textcolor{blue}{012345678} \dots$$

3. feladat

Mi a helyzet $k = 8$ -ra?

3. feladat

Mi a helyzet $k = 8$ -ra?

Ez nehezebb. Néhány próbálkozás után az a sejtésünk, hogy 8 nem elég.

Bizonyítás.

A bizonyítás konstruktívan indul. Legyen

$$a = 0,012\dots90011\dots99000111\dots99900001111\dots$$

Állítás

A fenti a számhoz nem elég 8 jegy beszúrása.

3. feladat

Bizonyítás.

Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \dots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k . Nézzünk b -ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

3. feladat

Bizonyítás.

Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \dots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k . Nézzünk b -ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

- Miért van ilyen?

3. feladat

Bizonyítás.

Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \dots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k . Nézzünk b -ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

- Miért van ilyen?
- A kettesek száma a periódusban legalább $\frac{k}{9}$.

3. feladat

Bizonyítás.

Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \dots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k . Nézzünk b -ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

- Miért van ilyen?
- A kettesek száma a periódusban legalább $\frac{k}{9}$.
- A számjegyek száma a periódusban legalább $10\frac{k}{9} > k$.

Ellentmondás!

3. feladat

- Általában d alapú számrendszerben $d - 1$ jegy beszúrása szükséges.
- Nevezzük **d -kritikus számnak** az olyan számokat, amelyek racionálissá tételéhez d -es számrendszerben $d - 1$ számjegy szükséges.

3. feladat

- Általában d alapú számrendszerben $d - 1$ jegy beszúrása szükséges.
- Nevezzük **d -kritikus számnak** az olyan számokat, amelyek racionálissá tételéhez d -es számrendszerben $d - 1$ számjegy szükséges.
- Van-e olyan szám, ami minden számrendszerben kritikus?

Köszönjük a figyelmet!