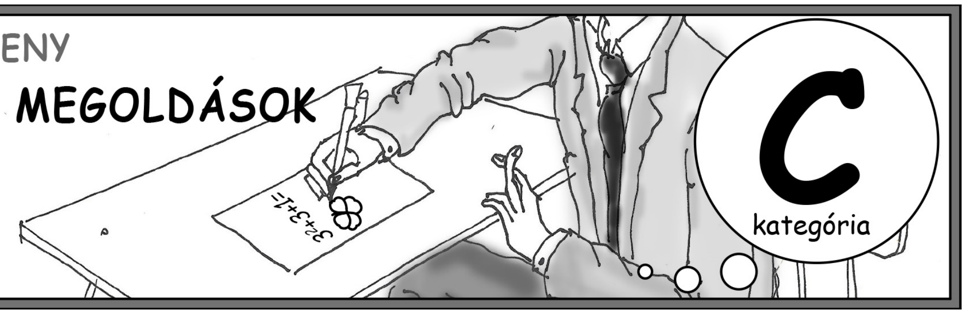
DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-10. OSZTÁLYOSOK

HELYI FORDULÓ:
2019. NOVEMBER 8.



C1. Dávid és Ákos beszélgetnek.

– Ákos: Nekem háromszor annyi pontom lett a tavalyi Düreren, mint neked.
– Dávid: De így is több pontom lett, mint ahány megyének tudod a székhelyét.
– Ákos: Na jó, de én több, mint háromszor annyi megyének tudom a székhelyét, mint te.
– Dávid: Ez is igaz, de én több megyének tudom a székhelyét, mint ahány gólt rúgtál tesiórán.
– Ákos: Na jó, de én több, mint négyszer annyi gólt rúgtam tesiórán, mint te.
– Dávid: Ez is igaz, de én is rúgtam gólt tesiórán.

Hány megyének tudja a székhelyét Ákos, ha tudjuk, hogy a tavalyi Düreren legfeljebb 60 pontot lehetett szerezni? A válaszotokat indokoljátok is.

Megoldás: Dávid utolsó megszólalásából tudjuk, hogy legalább egy gólt rúgott tesiórán, így Ákos legalább $4 \cdot 1 + 1 = 5$ gólt rúgott. Mivel Dávid ennél több megyének tudja a székhelyét, ezért legalább 6 megye székhelyét tudja. Ákos pedig több, mint 3-szor ennyi megye székhelyét tudja, azaz legalább $3 \cdot 6 + 1 = 19$-et. (Megjegyzés: Felhasználtuk, hogy a rúgott gólok száma, illetve a valaki által ismert megyeszékhelyek száma egész szám.)

Tegyük fel, hogy Ákos ennél több megye székhelyét ismeri, vagyis legalább 20-at. Ekkor Dávid az első állításával azt állítja, hogy 20-nál több pontja lett tavaly a Düreren, eszerint pedig Ákosnak $3 \cdot 20$-nál több, azaz több mint 60. Ez viszont nem lehetséges, hiszen 60 pont volt a maximum.

Tehát Ákos pontosan 19 megye székhelyét ismeri.

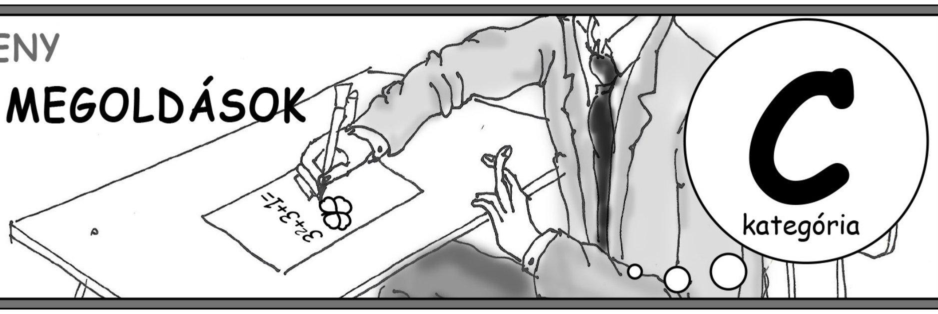
Megjegyzés: Magyarországnak 19 megyéje van.

DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-10. OSZTÁLYOSOK

HELYI FORDULÓ:
2019. NOVEMBER 8.



C2. Egy természetes számot *szerencsétlen*nek nevezünk, ha minden számjegye különböző, és a számjegyeinek összege 13.
a) Hány ötjegyű szerencsétlen szám van?
b) Hány páros van ezek között?
c) Hány hárommal osztható van közöttük?

Megoldás: a) Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet a legnagyobb számjegye a számnak. A legkisebb négy számjegy összege $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, így a legnagyobb számjegy legfeljebb $13 - 6 = 7$.

Ha szerepel a 7-es számjegy, akkor csak a $0, 1, 2$ és 3 jön szóba a maradék négy számjegynek.

Ha a legnagyobb számjegy a 6, akkor az 5 nem szerepelhet, mert $0 + 1 + 2 + 5 + 6 = 14$ már túl nagy. Tehát a $0, 1, 2, 3$ és 4 számjegyek közül pontosan egy nem szerepel és a számjegyek összege 13. Az összeg csak a $0, 1, 2, 4$ és 6 esetén lesz megfelelő.

Ha a legnagyobb számjegy 5, akkor csak $0, 1, 3, 4$ és 5 lehet a szám öt számjegye. Mindhárom esetet hasonlóképpen lehet megszámolni, csak arra kell figyelni, hogy az első számjegy nem lehet 0.

A legnagyobb számjegy pedig nem lehet a 4-es, hiszen $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 < 13$.

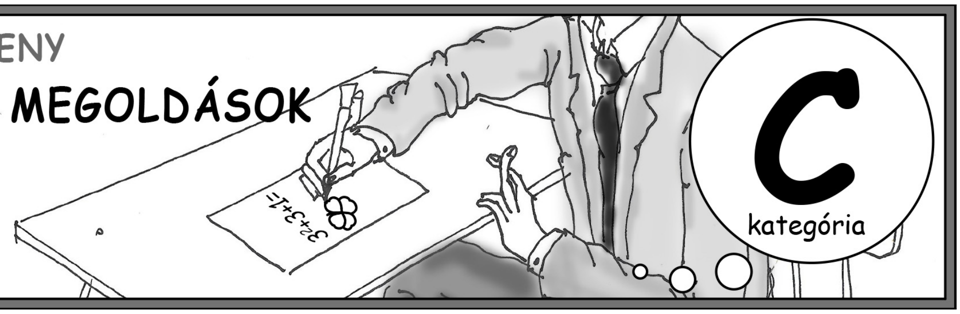
Így minden esetben 4 fajta számjegy szerepelhet a tízezres helyiértéken, ezután 4 az ezresen, majd 3 a százason, 2 a tízesen és az egyesek helyiértéknél már nincs választásunk. Azaz minden esetben $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$-ot kapunk eredményül. Összesen tehát $3 \cdot 96 = 288$ ötjegyű szerencsétlen szám van.

b) Kettővel azok a számok oszthatók, melyek utolsó számjegye páros.

Ha az utolsó számjegy 0, akkor mindhárom esetben, a fenti okoskodáshoz hasonlóan $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ megfelelő szám van.

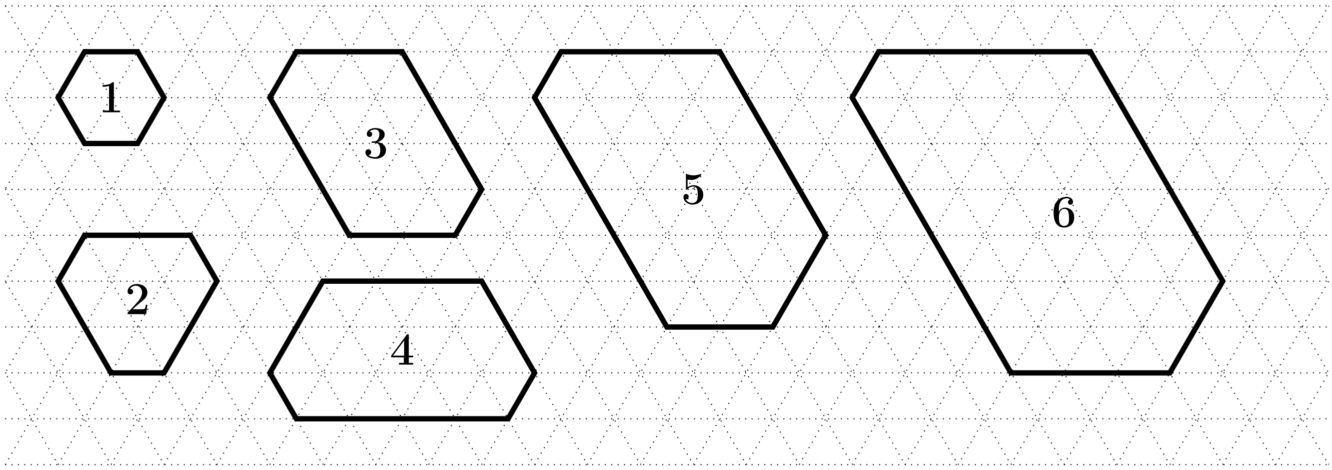
Nullától különböző páros számjegy az első esetben a 2, a másodikban a 2, a 4 és a 6, míg a harmadikban a 4. Ezeket hasonló módon számolhatjuk meg, ismét ügyelve arra, hogy az első számjegy nem lehet 0. Minden ilyen esetben $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.
Összesen tehát: $3 \cdot 24 + 5 \cdot 18 = 162$ ötjegyű páros szerencsétlen szám van.

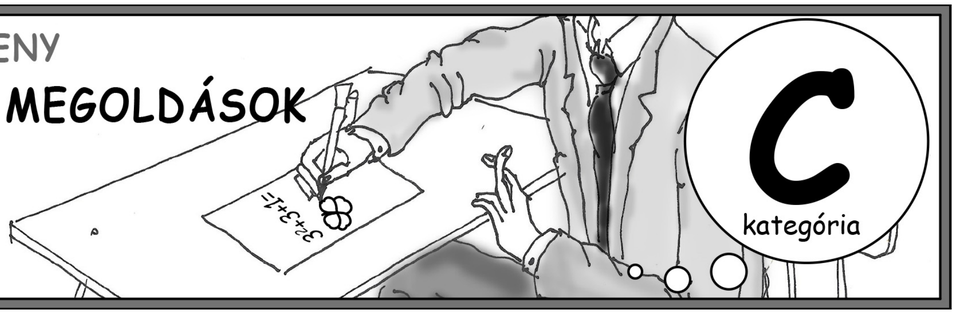
c) Hárommal azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege osztható hárommal. A 13 nem osztható hárommal, így nincs ilyen szerencsétlen szám.



C3. Albrecht olyan hatszögeket szeret szerkeszteni a füzetébe, melyeknek minden belső szöge $120°$-os, és minden oldala cm-ben mérve egész szám. Minden hatszögre ráírja, hogy hány különböző hosszúságú oldala van. Hányféle számot írhat Albrecht a hatszögekre?
Adjatok példát minél több lehetséges értékre.

Megoldás: 1-től 6-ig bármilyen számot írhat Albrecht a hatszögekre. Példákat adni a legegyszerűbb egy szabályos háromszögrácson. Ha a rácsot úgy méretezzük, hogy a kis háromszögek oldalai éppen 1 cm -esek legyenek, akkor a rajzolt hatszögeink minden oldala egész.





C4. Egy 26 fős osztályban minden héten egy hetes van, akinek a kilétét a következőképpen döntik el: az előző két hetes (névsor szerinti) sorszámát összeadják, és ha ez legfeljebb 26, akkor a kapott sorszámú diák lesz a hetes, egyébként a kapott számnál 26-tal kisebb sorszámú diákot választják ki. *Tehát ha a kapott szám* 28*, akkor a héten a* 2*-es sorszámú diák lesz a hetes.*
a) Lehet-e három egymást követő héten Szűcs, Nagy majd Lenger a hetes, ebben a sorrendben?
b) Lehet-e három egymást követő héten Lenger, Szűcs, majd Nagy a hetes, ebben a sorrendben?

Ha bármelyik eset előfordulhat, akkor adjátok meg, hogy a diákok hányadik helyen szerepelnek a névsorban. Ha egy eset nem lehetséges, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem állhat elő a sorrend.

Megoldás: a) Igen, lehetséges. A három diák névsor szerint Lenger, Nagy, Szűcs sorrendben következik. Megoldás lehet például egy olyan osztály, ahol a névsorban Lenger a hetedik, Nagy a tizenharmadik és Szűcs a huszadik. Ha tehát Szűcsöt Nagy követi a hetességben, a következő hetes sorszáma $20+13 = 33$ lenne. Mivel ez nagyobb 26-nál, a $33-26 = 7$. sorszámú diák lesz a következő hetes, aki éppen Lenger. *(Ilyen osztálynévsor könnyen elképzelhető.)*

b) Nem lehetséges. Jelöljük Lenger, Szűcs és Nagy névsorbeli sorszámát ilyen sorrendben l-lel, s-sel illetve n-nel! Nagy Lengert és Szűcsöt követi, ezért a feltétel alapján tudjuk, hogy $n = l + s$ vagy $n = l + s - 26$ teljesül.
Lehetséges-e, hogy $n = l+s$? Mivel $1 \leq l < n < s \leq 26$, így $1 \leq 26$ és $n < s$ is igaz. Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy $n+1 \leq l+s$. Emiatt $n < l+s$, tehát ebben az esetben nem állhat fenn egyenlőség.
Lehetséges-e a másik eset, vagyis hogy $n = l+s-26$? Mindkét oldalhoz 26-ot hozzáadva: $n+26 = l+s$. Tudjuk, hogy $n > l$ és $26 \geq s$, emiatt $n+26 > l+s$, tehát ez az eset sem állhat fenn. Összegezve: nem lehetséges, hogy a három tanuló egymást ilyen sorrendben kövesse hetesként.

C5. Egy 2×2-es tábla minden mezőjén van kezdetben legalább egy búzaszem. Egy lépésben az alábbi két művelet egyikét hajthatjuk végre:

(i) Ha egy sor minden mezőjén van legalább egy búzaszem, akkor minden mezőjéről elvehetünk egyet-egyet.
(ii) Az egyik oszlop minden mezőjén megkétszerezhetjük az ott lévő búzaszemek számát.

a) Mutassátok meg, hogy a jobb oldali kezdőállásból elérhető a fenti lépésekkel, hogy egy búzaszem se maradjon a táblán.
b) Mutassátok meg, hogy az üres táblát tetszőleges kezdőállás esetén el tudjuk érni ilyen lépésekkel.

3	5
5	3

c) Bizonyítsátok be, hogy ugyanez igaz 8×8-as táblára is.

Megoldás: a) Vegyünk el egy-egy búzaszemet az első sor mezőiről, majd duplázzuk meg az első oszlopot. Ekkor hajtsuk végre még négyszer az (i) lépést az első soron, így nem marad búzaszem a felső sorban. Az alsó sorban ekkor 10, illetve 3 búzaszem lesz. Duplázzuk meg a jobb oldali oszlopot, majd vegyünk el 2-2 búzaszemet az alsó sor mezőiről. Ekkor ismét duplázzuk meg a jobb oldali oszlopot, majd ismét vegyünk el 4-4-et az alsó sor mezőiről. Ezzel pedig leszedtük az összes búzaszemet a tábláról.

b) Nézzen ki a következő módon a táblázat:

a	b
c	d

Ürítsük ki először az első sort. Ha $a = b$, akkor elveszünk a darab búzaszemet az első sor mezőiről. Ha $a < b$, akkor addig duplázzuk a bal oszlopot, amíg az $b \geq a' \geq b - a'$ igaz nem lesz (itt a', illetve b' jelöli a bal, illetve jobb felső mezőben lévő búzaszemek számát). Ekkor elveszünk annnyi szemet az első sor mezőiről, hogy $a' = b' - a'$. Ilyen állapot lesz, mivel a szemek elvételével a' folyamatosan csökkenni fog, míg a $b' - a'$ állandó. Ekkor duplázzuk meg a bal oldali oszlopot, így a felső sor két mezőjén ugyanannyi búzaszem lesz. Ezt pedig el tudjuk tüntetni a felső sor ismételt csökkentésével. Ha $b > a$, akkor ugyanígy elvégezhető az algoritmus.

Ezek után az alsó sor mezőin továbbra is pozitív számú búzaszem marad, vagyis ugyanígy elvégezhető a fenti sorra mutatott algoritmus, és közben nem rontjuk el a fenti sort sem. Ezzel pedig beláttuk, hogy eltüntethető egy 2×2-es táblán az összes búzaszem.

c) Itt is megmutatjuk, hogy egy tetszőleges sorból eltünthető az összes búzaszem.

Vegyünk egy sort, és vegyük azt a két mezőt, amelyeken a legkevesebb búzaszem van. Ezt a két mezőt az előző algoritmus alapján ki lehet egyenlíteni, és az is megfigyelhető, hogy közben semelyik mezőről se fognak elfogyni a búzaszemek. Innentől kezdve ezt a két oszlopot "összeolvasztjuk", és ugyanazt fogjuk csinálni mindkét oszlopban. Ekkor vesszük ismét a két legkisebb mezőt ebben a sorban. (Az összeolvasztott oszlopok csak 1 mezőnek számítanak.) Elismételjük az előző lépéssort, majd az összeolvasztást is még hétszer. Ekkor az egész sorban ugyanannyi búzaszem fog maradni, vagyis el ki tudjuk üríteni ezt a sort. Ezt pedig minden egyes sorra külön-külön meg tudjuk tenni, és közben a már üres sorok nem fognak változni, úgyhogy az egész tábláról el tudjuk tüntetni a búzaszemeket.