



1. Albrecht azt a feladatot kapta matematikaórán, hogy végezze el az  $(a + 2b - 3)^2$  négyzetre emelést. Az  $a^2 + 4b^2 - 9$  eredményt kapta. – De hát ez nem helyes! – mondta a tanára – Ellenőrzésképpen helyettesíts be  $a$  és  $b$  helyére valamilyen pozitív egész számot. – Albrecht teljesítette a felszólítást, de az eredménye helyesnek bizonyult. Vajon milyen számokat helyettesíthetett be?

- Mutassatok egy lehetséges behelyettesítést.
- Adjátok meg az összes számpárt, amelyet Albrecht behelyettesíthetett és bizonyítsátok be, hogy nincs több.

2. Egy  $2 \times 2$ -es tábla minden mezőjén van kezdetben legalább egy búzaszem. Egy lépésben az alábbi két művelet egyikét hajthatjuk végre:

- Ha egy sor minden mezőjén van legalább egy búzaszem, akkor minden mezőjéről elvehetünk egyet-egyet.
- Az egyik oszlop minden mezőjén megkétszerezhetjük az ott lévő búzaszemek számát.

a) Mutassátok meg, hogy a jobb oldali kezdőállásból elérhető a fenti lépésekkel, hogy egy búzaszem se maradjon a táblán.

b) Mutassátok meg, hogy az üres táblát tetszőleges kezdőállás esetén el tudjuk érni ilyen lépésekkel.

3	5
5	3

c) Bizonyítsátok be, hogy ugyanez igaz  $8 \times 8$ -as táblára is.

3. a) Lehetséges-e, hogy két különböző pozitív egész szám pozitív osztóinak összege megegyezik?

b) Mutassátok meg, hogy ha két pozitív egész szám pozitív osztóinak szorzata azonos, akkor a két szám egyenlő.

4. Legyen  $ABC$  egy hegyesszögű háromszög, melynek  $AB$  oldala 1 egység. Tükrözzük az  $A$ , illetve  $B$  csúcsokat a  $BC$ , illetve  $AC$  oldalfelező pontokra, így kapjuk az  $A'$  és  $B'$  pontokat. Tudjuk, hogy az  $ABC$ ,  $A'BC$  és  $B'AC$  háromszögek magasságpontjai egy szabályos háromszöget határoznak meg.

a) Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlőszárú.

b) Milyen hosszú a háromszög  $AB$  oldalhoz tartozó magassága?

5. Az  $n \times n$ -es táblázat egy kitöltését *önleíró*nak nevezzük, ha a táblázat minden mezőjében az a szám áll, amennyi a mező sorában és oszlopában rajta kívül összesen található páros számok száma. Hányféle önleíró kitöltése létezik

a) a  $3 \times 3$ -as táblázatnak?

b) a  $4 \times 4$ -es táblázatnak?

c) az  $5 \times 5$ -ös táblázatnak?

*Két kitöltést különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyben különböző számok állnak a két kitöltésben.*

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk:*