. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-12. OSZTÁLYOSOK

HELYI FORDULÓ:
2019. NOVEMBER 8.

E
kategória

E1. Albrecht azt a feladatot kapta matematikaórán, hogy végezze el az $(a+2b-3)^2$ négyzetre emelést. Az a^2+4b^2-9 eredményt kapta. – De hát ez nem helyes! – mondta a tanára – Ellenőrzésképpen helyettesíts be a és b helyére valamilyen pozitív egész számot. – Albrecht teljesítette a felszólítást, de az eredménye helyesnek bizonyult. Vajon milyen számokat helyettesíthetett be?

a) Mutassatok egy lehetséges behelyettesítést.

b) Adjátok meg az összes számpárt, amelyet Albrecht behelyettesíthetett és bizonyítsátok be, hogy nincs több.

Megoldás: **a)** Egy jó behelyettesítés például $a=3$, $b=1$, hiszen $2^2=9+4-9$.

b) Ha Albrecht helyes eredményt kapott, az azt jelenti, hogy $(a+2b-3)^2=a^2+4b^2-9$. Ezt kibontva:

$$a^2+4b^2+9+4ab-6a-12b=a^2+4b^2-9$$

Rendezve és egyszerűsítve:

$$2ab-3a-6b+9=0$$

Alakítsuk szorzattá:

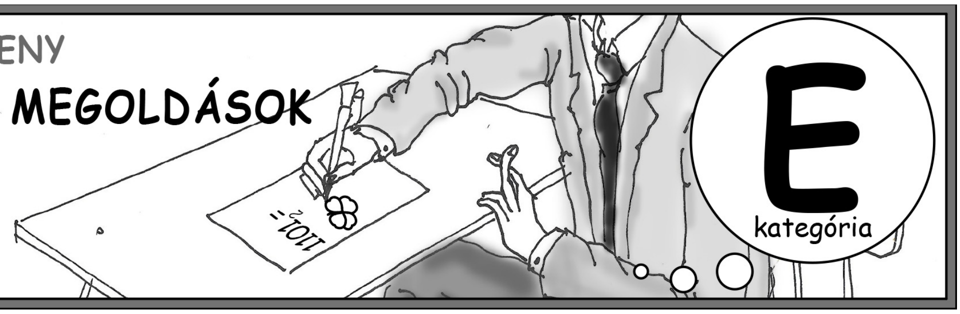
$$(2b-3)(a-3)=0$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha az egyik tényező 0, ezért két eset van.

1. eset: $2b-3=0$, amiből $b=\frac{3}{2}$, ami nem lehetséges, mert b-nek egész számnak kell lennie.

2. eset: $a-3=0$, amiből $a=3$.

Így akkor és csakis akkor kapja Albrecht ugyanazt az eredményt, ha $a=3$, és ilyenkor b helyére tetszőleges pozitív egészet írhat.



E2. Egy 2×2-es tábla minden mezőjén van kezdetben legalább egy búzaszem. Egy lépésben az alábbi két művelet egyikét hajthatjuk végre:

(i) Ha egy sor minden mezőjén van legalább egy búzaszem, akkor minden mezőjéről elvehetünk egyet-egyet.
(ii) Az egyik oszlop minden mezőjén megkétszerezhetjük az ott lévő búzaszemek számát.

a) Mutassátok meg, hogy a jobb oldali kezdőállásból elérhető a fenti lépésekkel, hogy egy búzaszem se maradjon a táblán.
b) Mutassátok meg, hogy az üres táblát tetszőleges kezdőállás esetén el tudjuk érni ilyen lépésekkel.

3	5
5	3

c) Bizonyítsátok be, hogy ugyanez igaz 8×8-as táblára is.

Megoldás: a) Vegyünk el egy-egy búzaszemet az első sor mezőiről, majd duplázzuk meg az első oszlopot. Ekkor hajtsuk végre még négyszer az (i) lépést az első soron, így nem marad búzaszem a felső sorban. Az alsó sorban ekkor 10, illetve 3 búzaszem lesz. Duplázzuk meg a jobb oldali oszlopot, majd vegyünk el 2-2 búzaszemet az alsó sor mezőiről. Ekkor ismét duplázzuk meg a jobb oldali oszlopot, majd ismét vegyünk el 4-4-et az alsó sor mezőiről. Ezzel pedig leszedtük az összes búzaszemet a tábláról.

b) Nézzen ki a következő módon a táblázat:

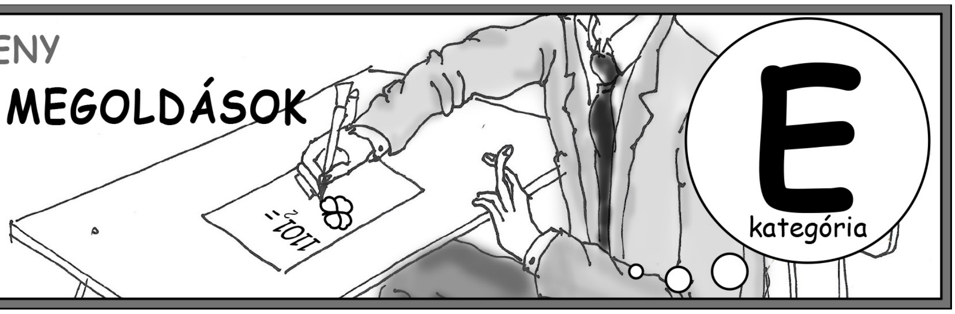
a	b
c	d

Ürítsük ki először az első sort. Ha $a = b$, akkor elveszünk a darab búzaszemet az első sor mezőiről. Ha $a < b$, akkor addig duplázzuk a bal oszlopot, amíg az $b \geq a' \geq b - a'$ igaz nem lesz (itt a', illetve b' jelöli a bal, illetve jobb felső mezőben lévő búzaszemek számát). Ekkor elveszünk annnyi szemet az első sor mezőiről, hogy $a' = b' - a'$. Ilyen állapot lesz, mivel a szemek elvételével a' folyamatosan csökkenni fog, míg a $b' - a'$ állandó. Ekkor duplázzuk meg a bal oldali oszlopot, így a felső sor két mezőjén ugyanannyi búzaszem lesz. Ezt pedig el tudjuk tüntetni a felső sor ismételt csökkentésével. Ha $b > a$, akkor ugyanígy elvégezhető az algoritmus.

Ezek után az alsó sor mezőin továbbra is pozitív számú búzaszem marad, vagyis ugyanígy elvégezhető a fenti sorra mutatott algoritmus, és közben nem rontjuk el a fenti sort sem. Ezzel pedig beláttuk, hogy eltüntethető egy 2×2-es táblán az összes búzaszem.

c) Itt is megmutatjuk, hogy egy tetszőleges sorból eltünthető az összes búzaszem.

Vegyünk egy sort, és vegyük azt a két mezőt, amelyeken a legkevesebb búzaszem van. Ezt a két mezőt az előző algoritmus alapján ki lehet egyenlíteni, és az is megfigyelhető, hogy közben semelyik mezőről se fognak elfogyni a búzaszemek. Innentől kezdve ezt a két oszlopot "összeolvasztjuk", és ugyanazt fogjuk csinálni mindkét oszlopban. Ekkor vesszük ismét a két legkisebb mezőt ebben a sorban. (Az összeolvasztott oszlopok csak 1 mezőnek számítanak.) Elismételjük az előző lépéssort, majd az összeolvasztást is még hétszer. Ekkor az egész sorban ugyanannyi búzaszem fog maradni, vagyis el ki tudjuk üríteni ezt a sort. Ezt pedig minden egyes sorra külön-külön meg tudjuk tenni, és közben a már üres sorok nem fognak változni, úgyhogy az egész tábláról el tudjuk tüntetni a búzaszemeket.

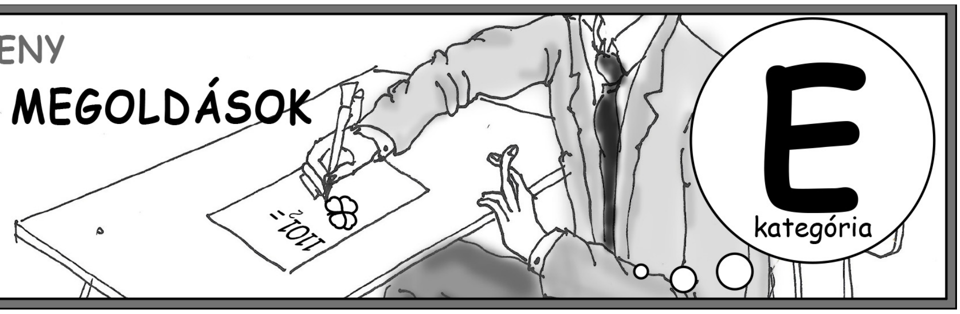


E3. **a)** Lehetséges-e, hogy két különböző pozitív egész szám pozitív osztóinak összege megegyezik?
b) Mutassátok meg, hogy ha két pozitív egész szám pozitív osztóinak szorzata azonos, akkor a két szám egyenlő.

Megoldás: **a)** Igen, például például a 6 és 11 osztóinak összege is 12.

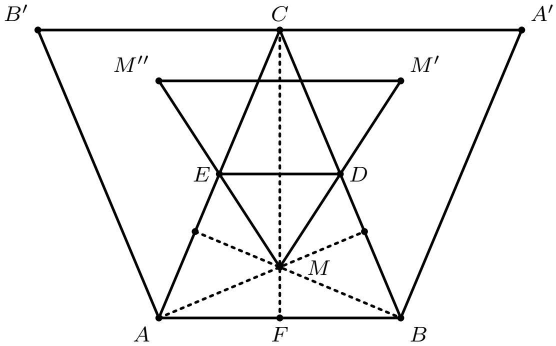
b) Először igazoljuk, hogy n osztóinak szorzata $n^{\frac{d(n)}{2}}$, ahol $d(n)$ jelöli n osztóinak számát. Az osztók osztópárokba rendeződnek, azaz ha $k \mid n$, akkor $\frac{n}{k} \mid n$ és $k \cdot \frac{n}{k} = n$. Ebből azonnal adódik a képlet.

Azt kell még igazolni, hogy ha $n^{\frac{d(n)}{2}} = m^{\frac{d(m)}{2}}$ akkor $n = m$. Látszik, hogy ekkor egy prím pontosan akkor osztja n-et, ha m-et is osztja. Vegyünk egy p prímet, mely osztja n-et. Legyen k az a pozitív egész, melyre $p^k \mid n$, de $p^{k+1} \nmid n$, és hasonlóan legyen l az a szám, melyre $p^l \mid m$, de $p^{l+1} \nmid m$. Ekkor mivel $n^{\frac{d(n)}{2}} = m^{\frac{d(m)}{2}}$, ezért p kitevője is megegyezik a két oldalon, így $\frac{k \cdot d(n)}{2} = \frac{l \cdot d(m)}{2}$, azaz $\frac{k}{l} = \frac{d(m)}{d(n)}$. Ez minden prímre igaz, így ha $d(n) < d(m)$, akkor minden p prímre, mely osztja n-et, a p kitevője n-ben nagyobb, mint m-ben, így $n > m$. Mivel m minden osztója n-et is osztja, így nem lehet egyenlő az osztók szorzata. Hasonlóan $d(n) > d(m)$ sem lehet, így $d(n) = d(m)$, azaz minden prím kitevője megegyezik n-ben és m-ben, és ez pont azt jelenti, hogy $n = m$.

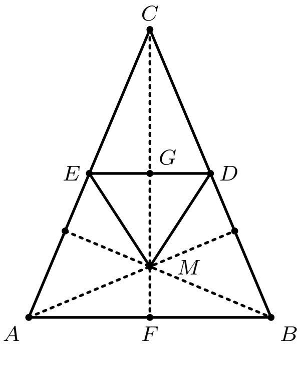


E4. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek AB oldala 1 egység. Tükrözzük az A, illetve B csúcsokat a BC, illetve AC oldalfelező pontokra, így kapjuk az A' és B' pontokat. Tudjuk, hogy az ABC, $A'BC$ és $B'AC$ háromszögek magasságpontjai egy szabályos háromszöget határoznak meg.
a) Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú.
b) Milyen hosszú a háromszög AB oldalhoz tartozó magassága?

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit. Legyenek az ABC háromszög oldalfelező pontjai rendre D, E, F, az ABC, $A'BC$ és $B'AC$ háromszögek magasságpontjai rendre M, M' és M''.



Az ABC és $A'BC$ háromszögek egymás tükörképei a D pontra nézve, ezért ez a magasságpontjaikra is fennáll, tehát az MM' szakasz felezőpontja a D pont. Hasonlóan az MM'' szakasz felezőpontja az E pont. Ezek szerint a DE szakasz középvonal az $MM'M''$ háromszögben, tehát a DEM háromszög is szabályos. Ebből következik, hogy az M pont illeszkedik a DE szakaszfelező merőlegesére, ami az AB oldalra is merőleges, mivel a DE szakasz az AB oldalhoz tartozó középvonal az ABC háromszögben. Így a C csúcs is illeszkedik rá, ami azt jelenti, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú.



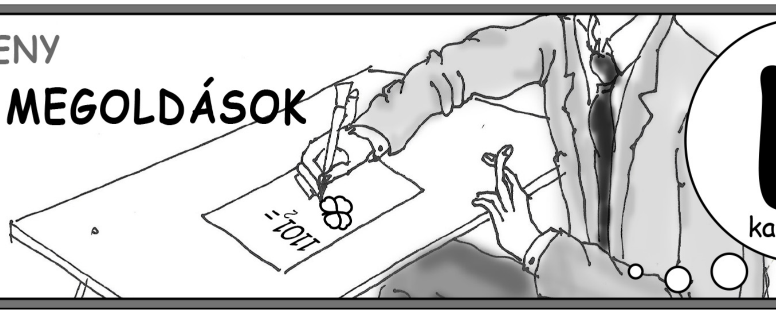
Most már tudjuk azt, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú, illetve a DEM háromszög szabályos. Tegyük fel, hogy az M pont az DE és AB egyenesek között helyezkedik el. Legyen a DE szakasz felezőpontja G. Az AB oldalhoz tartozó CF magasságvonal hossza legyen m. A DE szakasz középvonal, ezért a CG szakasz hossza $\frac{m}{2}$. Az MED háromszög szabályos, így a DE oldalhoz tartozó GM magasságvonal hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Az AFC és MFA háromszögek szögei egyenlőek, így hasonlóak, ezért

$$\frac{AF}{FC} = \frac{MF}{FA},$$

$$MF = \frac{AF}{FC} \cdot FA = \frac{\frac{1}{2}}{m} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4m}.$$

Mivel $CF = CG + GM + MF$, tehát az alábbi egyenletet kapjuk:

$$m = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4m},$$



$$\frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4m} = 0,$$

$$2m^2 - \sqrt{3}m - 1 = 0,$$

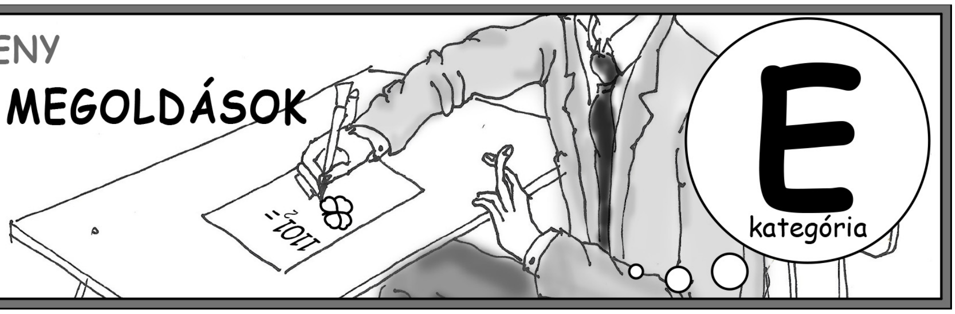
$$m_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}.$$

Mivel a magasságvonal hossza pozitív, így az AB oldalhoz tartozó magasság hossza $m = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$.

Diszkusszió: Találtunk egy értéket és egy hozzá tartozó háromszöget, amit még meg kell vizsgálnunk, hogy teljesíti-e a feladatban megfogalmazott feltételt. Világos, hogy csak akkor lehet, probléma, ha ennek a háromszögnek a magasságpontja nem DE és AB egyenesek közé esik. Viszont e két egyenes közé fog esni, hiszen egy egyenlőszárú háromszög magasságpontja pontosan akkor esik e két egyenes közé, ha a csúcsszöge kisebb, mint 60°. Mivel $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért a háromszög csúcsszöge valóban kisebb, mint 60°. A disszkusszióból természetesen hiányzik az az eset, amikor a háromszög magasságpontja az alaphoz tartozó középvonal fölé esik. Ez az eset pontosan akkor áll fenn, ha háromszög csúcsszöge nagyobb, mint 60°. Viszont ekkor $\frac{1}{2} > EC > EM$, tehát a DEM háromszög nem lehet szabályos.

Tehát az AB oldalhoz tartozó magasság hossza $m = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$.

Megjegyzés: Ha nem kötjük ki, hogy a háromszög hegyesszögű, akkor létezik még egy ilyen háromszög. Méghozzá az a háromszög, melyben az AB oldalhoz tartozó magasság hossza $m = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$, amit egy teljesen analóg számolásból kaphatunk meg.



E5. Az $n \times n$-es táblázat egy kitöltését *önleíró*nak nevezzük, ha a táblázat minden mezőjében az a szám áll, amennyi a mező sorában és oszlopában rajta kívül összesen található páros számok száma. Hányféle önleíró kitöltése létezik
a) a 3×3-as táblázatnak?
b) a 4×4-es táblázatnak?
c) az 5×5-ös táblázatnak?
Két kitöltést különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyben különböző számok állnak a két kitöltésben.

Megoldás: A feladatot tetszőleges $n \times n$-es táblázatra oldjuk meg. Második megoldásért lásd az E+ kategória 2-es feladatát.

Az első lényeges észrevételünk, hogy elég az egyes mezőkben álló számok paritását meghatározni, az egyértelműen megad egy kitöltést. Világos, hogy minden kitöltésből egyértelműen következik a mezők paritása, és fordítva is, csak össze kell számolnunk, hány páros elem van egy adott elem sorában és oszlopában rajta kívül. Ezentúl 0-val jelöljük a páros mezőket és 1-essel a páratlanokat.

A második észrevétel a következő: Két szomszédos oszlop vagy megegyezik, vagy minden mezőjük (soronként) ellentétes. Ebből következik, hogy bármely két oszlop megegyezik, vagy pont ellentétes. Természetesen ez a sorokra is igaz lesz. Az állítást elég igazolnunk 2×2-es résztáblázatokra. Nézzen ki a táblázatunk a következőképpen:

A	C	E
B	D	F
G	H	

Itt a betűk azt jelölik, hogy az adott tartományban hány páros mező van. Nyilván ekkor a bal felső 2×2-es résztáblázatban a mező paritása pont ellentétes a beleírt betű paritásával, de ekkor is elég megmutatnunk, hogy A, B illetve C, D megegyeznek, vagy pont ellentétesek.

Ekkor a következő kongruenciákat írhatjuk fel a bal felső 2×2 mező alapján:

$$A \equiv C + E + B + G \pmod 2$$

$$B \equiv D + F + A + G \pmod 2$$

$$C \equiv A + E + D + H \pmod 2$$

$$D \equiv B + F + C + H \pmod 2$$

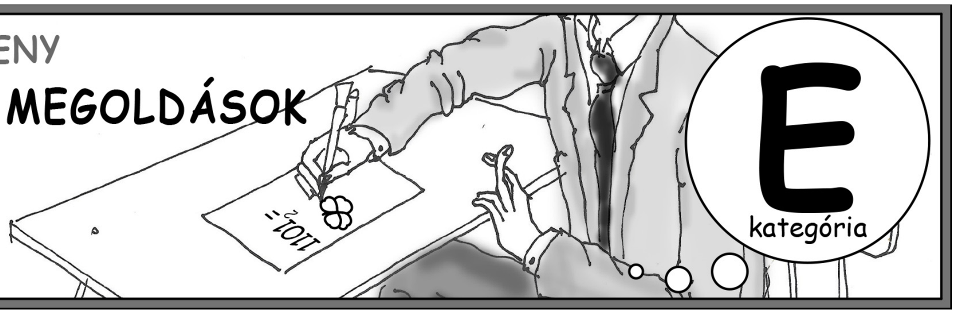
Ezt a négy egyenletet összeadva:

$$A + B + C + D \equiv 2A + 2B + 2C + 2D + 2E + 2F + 2G + 2H \equiv 0 \pmod 2$$

$$A + C \equiv B + D \pmod 2$$

Ami azt jelenti, hogy ha $A \equiv C \pmod 2$, akkor $B \equiv D \pmod 2$, és ha $A \not\equiv C \pmod 2$, akkor pedig $B \not\equiv D \pmod 2$, ezt szerettünk volna belátni.

Bevezetünk néhány elnevezést és jelölést: Egy táblázatot önleírónak nevezünk, ha teljesül rá a feladat feltétele. A táblázat i-edik sorában és j-edik oszlopában található mezőt (i, j)-vel fogjuk jelölni, és egy kitöltésnél $f(i, j)$-vel jelöljük az (i, j) mezőbe írt számot. Egy mezőt egy kitöltésnél jónak



nevezünk, ha teljesül rá a feltétel, azaz annyi páros van rajta kívül a sorában és az oszlopában modulo 2, mint amennyit a mezőbe írtunk. Nevezzünk egy kitöltést szépnek, ha minden oszlop megegyezik az elsővel, vagy pont ellentétes. Világos, hogy egy kitöltés pontosan akkor szép, ha minden sor megegyezik az elsővel, vagy pont ellentétes. A második észrevétel szerint minden önleíró kitöltés szép.

Most pedig megmutatjuk, hogy ha n páros, akkor a táblázatnak pontosan egy önleíró kitöltése van, amikor minden mezőjén páros szám áll (azaz $2n-2$).

Indirekten tegyük fel, hogy egy önleíró kitöltésben van páratlan mező. Mivel a táblázat sor- és oszlopcserék után is kielégíti a feltételeket, feltehetjük, hogy $f(1,1)=1$. A feladat feltétele szerint ekkor vagy az első sorban, vagy az első oszlopban kell páros számnak lennie, feltehetjük, hogy $f(1,2)=0$. Legyen x a páros mezők száma az első oszlopban. Ekkor mivel a kitöltés szép, ezért ha egy oszlopban az első mező 1, akkor ez az oszlop megegyezik az elsővel, tehát x darab páros mezőt tartalmaz, míg ha 0 az első mező, akkor az oszlop pont ellentétes, mint az első, így az oszlopban $n-1-x$ darab páros szám van még az első 0-n kívül. Legyen $k+1$ darab páros szám az első sorban.

1	0	k db ps
x db ps	$n-1-$ $-x$ db ps	

Írjuk fel az $(1,1)$ mezőre a feladat feltételét:

$$1 \equiv k+1+x \pmod 2$$

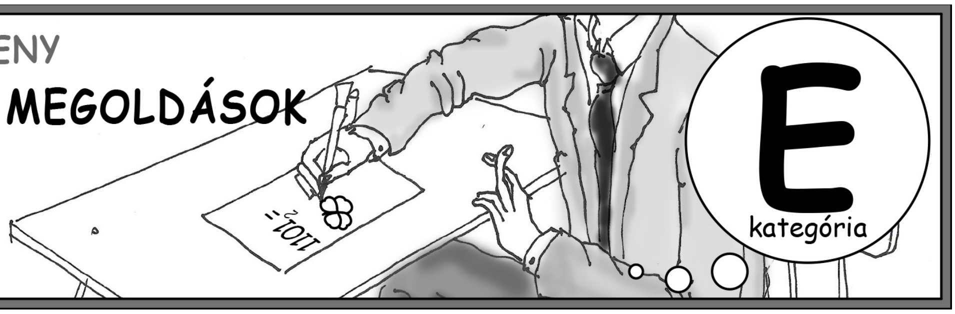
Most az $(1,2)$ mezőre:

$$0 \equiv k+n-1-x \equiv k+x+1 \pmod 2$$

Ellentmondás.

Ha n páratlan, akkor azt állítjuk, hogy 2^{2n-2}-féle önleíró kitöltés létezik.

Válasszuk meg tetszőlegesen, hogy az első oszlopot, és az első sort az utolsó mezője kivételével hogyan töltjük ki. Ez $2n-2$ szabad választás, tehát 2^{2n-2}-féleképpen tehetjük meg. Azt állítjuk, hogy minden ilyen elkezdést pontosan egyféleképpen tudjuk önleíró kitöltéssé egészíteni. Az $(1,1)$ mezőnek jónak kell lennie, ez meghatározza az $(1,n)$ mezőt. A kitöltésnek szépnek is kell lennie, és ez minden oszlopot meghatározza, mivel az első sorban lévő eleme minden oszlopnak meghatározza, hogy az első oszloppal egyeznie kell, vagy pont ellentétesnek kell lennie. Tehát egyértelműen ki tudtuk tölteni a táblázatot, már csak azt kell igazolni, hogy ez egy önleíró kitöltés. Ehhez az kell, hogy minden mező jó legyen. $(1,1)$-ről tudjuk, hogy jó, igazoljuk, hogy ekkor $(1,2)$ is jó. Ha $f(1,1)=f(1,2)$, akkor az első sorban $f(1,1)$-n kívül ugyanannyi páros van, mint $f(1,2)$-n kívül, és az oszlopuk megyegyezik, tehát $(1,2)$ is jó. Ha $f(1,1)\neq f(1,2)$ akkor az első sorban $f(1,1)$-n kívül nem annyi páros van modulo 2, mint ahány $f(1,2)$-n kívül. Ha az első oszlopban $f(1,1)$-n kívül x darab páros szám van, akkor a



második oszlopában $f(1,2)$-n kívül $n-1-x$ lesz mivel a két oszlop ellentétes. $x \equiv n-1-x$, tehát $(1,2)$ ebben az esetben is jó. Ugyanígy tudjuk igazolni, hogy $(1,j)$ jó minden j-re, és hasonlóan tudjuk igazolni, hogy ha $(1,j)$ jó akkor (i,j) is az. Tehát a táblázat tényleg önleíró.

Összefoglalva: páros n esetén pontosan 1, páratlan n esetén pedig 2^{2n-2}-féle megfelelő kitöltése létezik az $n \times n$-es táblázatnak.

Tehát a válaszok: **a)** 16-féle, **b)** egyféle, **c)** $2^8 = 256$-féle kitöltés létezik.