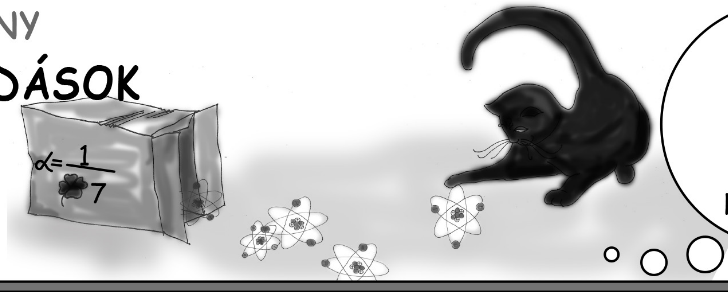
DÜRER VERSENY

# FIZIKA MEGOLDÁSOK

11-12. OSZTÁLYOSOK

HELYI FORDULÓ:
2019. NOVEMBER 8.



**F**
**kategória**

## 1. Feladat

A szögsebesség $\omega = \frac{v}{r}$, amiből $U_m = \alpha\omega = \alpha\frac{v}{r}$, ebből kifejezhető $v$ ismerve $U_m$-et.
A forgatónyomaték $M = mgr$, amiből $I_m = \frac{1}{\alpha}M = \frac{mgr}{\alpha}$,
A tekercs ideális vezetővel helyettesíthető (nincs ellenállása), így a huroktörvény:
$I_mR + U_m = U_0$, amiből kifejezhető $U_m$, így a sebesség:

$$v = \frac{U_m r}{\alpha} = \frac{(U_0 - I_m R)r}{\alpha} = \frac{U_0 r}{\alpha} - \frac{mgRr^2}{\alpha^2}$$

## 2. Feladat

Első fékkel való hirtelen fékezéskor nem áll meg a talajhoz képest az első kerék, hanem tovább gördül. Közben emelkedik a bicikli hátulja. A kerékpár mozgási energiája megmarad közvetlen a fékezés után, ha a kerekek tömege elhanyagolható.
A helyzeti energia megváltozását a kezdeti mozgási energia fedezi, amiből a sebességkorlát:

$$\frac{1}{2}Mv^2 < Mg(\sqrt{a^2+b^2} - a) \quad \rightarrow \quad v < \sqrt{2g(\sqrt{a^2+b^2} - a)} = 2.24\frac{m}{s}$$

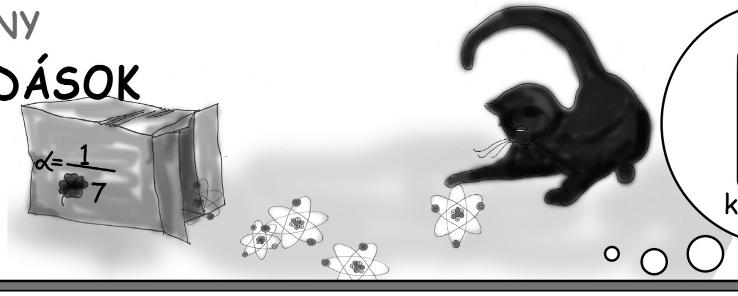
**Megjegyzés:** Ha a kerekek tömege nem hanyagolható el, akkor számolni kell az első kerék perdületének megmaradásával. Az első kerék perdületét az egész bicikli veszi át, így a hátsó kerék a fékezést követően rögtön megugrik. Tipikus kerékpár paraméterekkel számolva kevesebb mint $0.1\frac{m}{s}$-al tér el az eredmény a feladatban számoltól.

## 3. Feladat

($a$) A kiszorítandó víz térfogata $V' = A_1 d = 2375$ cm$^3$.
Jobboldali szintemelkedés meghatározásához számoljuk ki az egyes lépcsőfokok térfogatát:

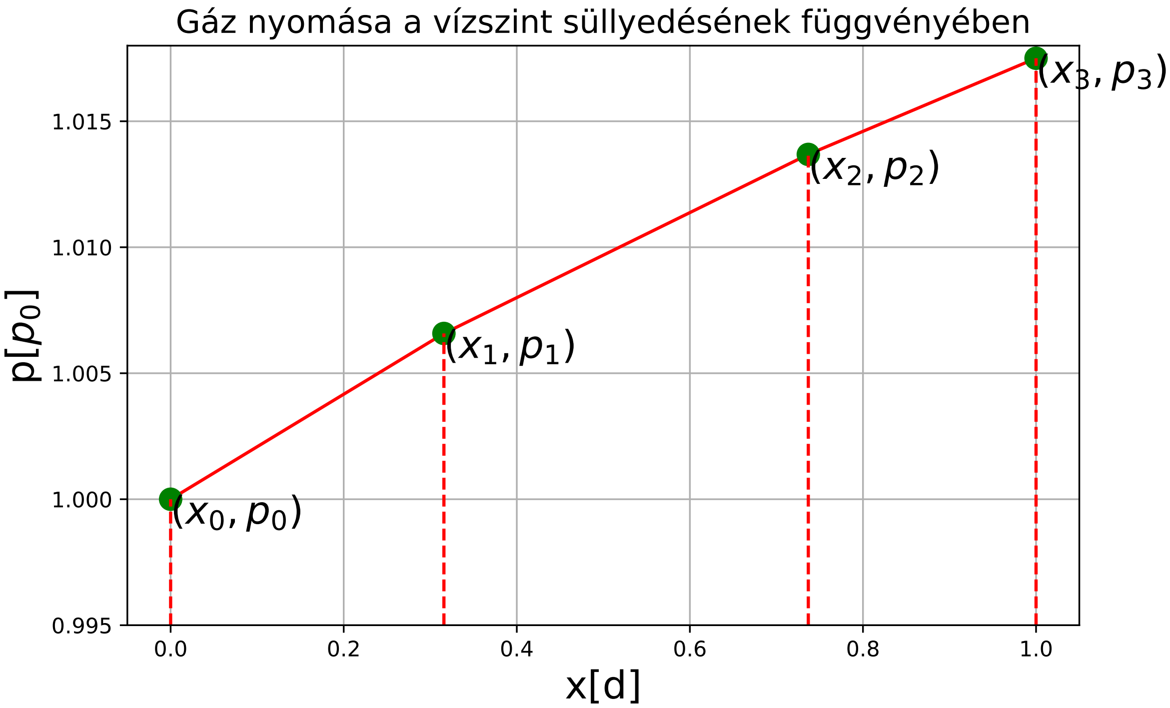
0. lépcsőfok (alapszint) szélessége $A_0/d = 20$ cm.
1. lépcsőfok szélessége $d_1 = 30$ cm, térfogata:$V_1 = d_1 d^2 = 750$ cm$^3$
2. lépcsőfok szélessége $d_2 = 40$ cm, térfogata:$V_2 = d_2 d^2 = 1000$ cm$^3$
3. lépcsőfok szélessége $d_3 = 50$ cm, térfogata:$V_3 = d_3 d^2 = 1250$ cm$^3$

$V' = V_1 + V_2 + 0.5V_3$, azaz 2.5 lépcsőnyi a szintemelkedés a jobb oldalon, baloldalon pedig csökken $d$-t a szint, így 3.5 d a szintkülönbség a két oldal közt a végállapotban.
Végállapotban a gáz nyomása: $p_3 = p_0 + 3.5\rho g = 1.0175 \cdot 10^5$ Pa



(*b*) Gáz nyomása megegyezik a külső légnyomás és a két oldal hidrosztatikai nyomáskülönbségének összegével.
Amikor a jobboldali tartályban a vízfelszín egy adott lépcsőfokon belül emelkedik, akkor $p(x)$ grafikon lineáris, ám amint meghalad egy lépcsőfokot a vízszint, törése van a grafikonnak, $p(x)$ továbbra is lineáris, de csökken a meredeksége.

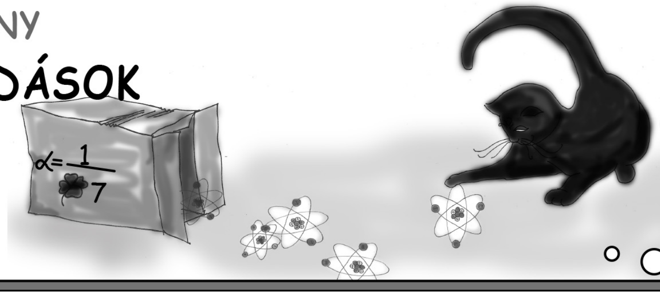
Határozzuk meg a töréspontok $P_i(x_i, p_i)$ koordinátáit. Kezdőpontot és végpontot ismerjük: $P_0(0, 10^5 \text{ Pa})$, $P_3(d, 1.0175 p_0 \text{ Pa})$
Ezek között van a két töréspont.:
Amikor az első lépcsőfok éppen megtelt vízzel, akkor a bal oldalon $x_1 = \frac{V_1}{A_1} = 0.3158$ d, hozzá tartozó nyomás: $p_1 = p_0 + \rho g(d + x_1) = 1.00658 \cdot 10^5$ Pa
Amikor a második lépcsőfok megtelt vízzel, akkor a bal oldalon $x_2 = \frac{V_1+V_2}{A_1} = 0.7368$ d, hozzá tartozó nyomás: $p_2 = p_0 + \rho g(2d + x_2) = 1.01368 \cdot 10^5$ Pa




(*c*) Fűtés $t$ ideje alatt $Q = 0.4Pt$ hő fordítódik a gáz belsőenergiájának ($E_b = \frac{f}{2}pV$) és térfogati munkájának fedezésére, ami $p(x)$ grafikon alatti területének $A_1$-szerese:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2}(p_3 H - p_0(H - d))A_1 = 616.609 \text{ J}, \quad |W| = \sum_{i=0}^{2}(x_{i+1} - x_i)\frac{p_{i+1} + p_i}{2}A_1 = 240.28 \text{ J}$$

Amiből a kérdéses idő $t = \frac{\Delta E + |W|}{0.4P} = 360 \text{ s} = 6 \text{ min}.$






# 4. Feladat

A csepp mozgása két független részre bontható: egy $z$ irányú mozgásra és egy $x - y$ síkban történő mozgásra. Utóbbi esetében a test kezdősebessége $v_0$, így az a mágneses mező hatására ennek megfelelő sugarú körpályára tér. A mozgásegyenletet felírva a körmozgás körfrekvenciája kiszámítható:

$$m\frac{v_0^2}{r} = qv_0B \ ,$$

$$\omega_m = \frac{v_0}{r} = \frac{qB}{m} \ .$$

A $z$ tengely irányában az elektromos tér hatására a csepp gyorsulni kezd. A mozgásegyenlet:

$$ma = qE = -q\alpha z \ .$$

Ez éppen a rugóra felfüggesztett test mozgásegyenletével analóg, ahol a rugóállandónak jelen esetben $q\alpha$ felel meg. Ez alapján a csepp $z$ irányban harmonikus rezgőmozgást fog végezni, melynek körfrekvenciája:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{q\alpha}{m}} \ .$$

A csepp pályája akkor záródhat, ha egy idő után visszatér a kezdőpozíciójába, ugyanakkora és olyan irányú sebességgel, ahogy indult. Ez akkor lehetséges, ha $z$ irányban, és az $x - y$ síkban is valamely egész számú periódust azonos idők alatt tesz meg:

$$n\frac{2\pi}{\omega_m} = k\frac{2\pi}{\omega_e} \ ,$$

ahol $n, k$ egész számok. Ezt átrendezve kapjuk, a szükséges feltételt:

$$\frac{\omega_m}{\omega_e} = \frac{n}{k} \ ,$$

$$\sqrt{\frac{qB^2}{\alpha m}} = \frac{n}{k} \ ,$$

vagyis a bal oldalon szereplő mennyiségnek racionálisnak kell lennie.

**Megjegyzés:** Érdekesség, hogy a feltétel teljesülése esetén a kérdéses olajcsepp pályáját az $x - z$ síkra vetítve egy Lissajous-görbét kapunk. Hasonló görbékkel lehet találkozni harmonikus rezgések összetételénél vagy akár elektromos áramkörökben is.

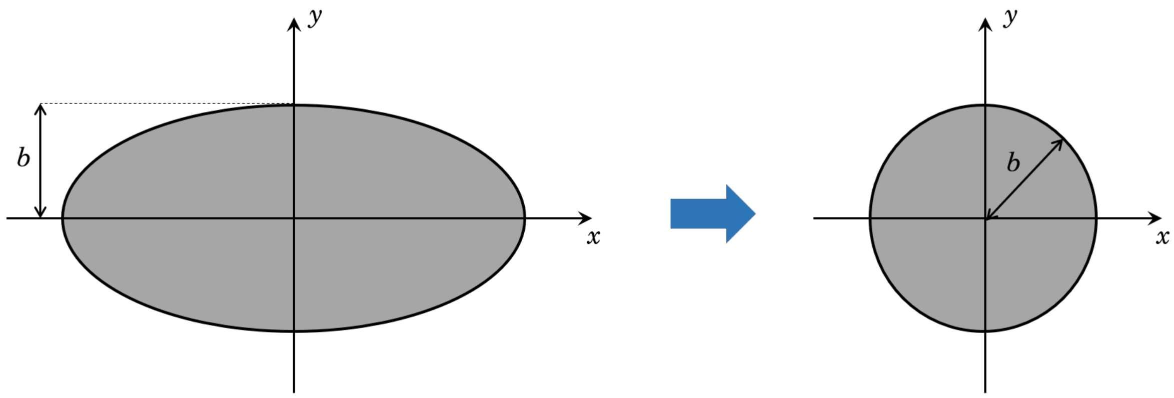
## 5. Feladat

Vizsgáljuk meg mindenekelőtt egy $m$ tömegű, $R$ sugarú kör alakú fémlap esetét. Jelöljük a tengelyeket a feladat lerásához hasonló módon, vagyis $x$ és $y$ tengelyek essenek a körlap síkjába, $z$ legyen erre merőleges, és az origó legyen a kör középpontja. Ekkor a $z$ tengelyre vonatkoztatott nyomatékot ismerjük (a Négyjegyű Függvénytáblázatban is megtalálható): $\frac{1}{2}mR^2$. Emellett a körlap forgásszimmetriájából adódóan az $x$ és $y$ tengelyekre vonatkoztatott nyomatékok egyenlőek. Ezeket felhasználva írjuk fel a poláris ekvatoriális tételt:

$$\frac{1}{2}mR^2 = \Theta_z^{circ} = \Theta_x^{circ} + \Theta_y^{circ} = 2\Theta_x^{circ} \ ,$$

$$\Theta_x^{circ} = \Theta_y^{circ} = \frac{1}{4}mR^2 \ .$$

Ezt követően rátérhetünk az ellipszis alakú fémlap esetére. Mutasson itt $x$ tengely a nagytengely irányába, $y$ tengely a kistengely irányába, $z$ pedig továbbra is merőleges a test síkjára. Vegyük az $x$ tengelyre vonatkoztatott nyomatékot! Ha a testet a tengely irányába megnyújtjuk, az tehetetlenségi nyomatékán nem változtat. Ez azt jelenti, hogy ily módon az ellipszist akár egy $b$ sugarú körlappá is összenyomhatjuk (lásd 1. ábra)! Ennek pedig az előző számolás alapján ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát:




1. ábra. $\Theta_x$ nem változik, ha a testet az $x$ tengellyel párhuzamosan összenyomjuk.

$$\Theta_x^{ell} = \Theta_x^{circ} = \frac{1}{4}mb^2 \ .$$

Hasonlóan az $y$ tengely esetén:

$$\Theta_y^{ell} = \Theta_y^{circ} = \frac{1}{4}ma^2 \ .$$

Végül alkalmazva a poláris-ekvatoriális-tételt, kapjuk a $z$ tengelyre vonatkoztatott nyomatékot:

$$\Theta_z^{ell} = \Theta_x^{ell} + \Theta_y^{ell} = \frac{1}{4}m\left(a^2 + b^2\right) \ .$$