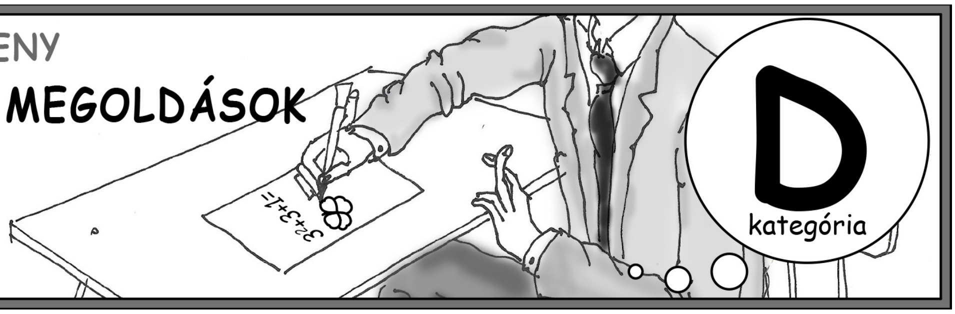
DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-12. OSZTÁLYOSOK

HELYI FORDULÓ:

2019. NOVEMBER 8.

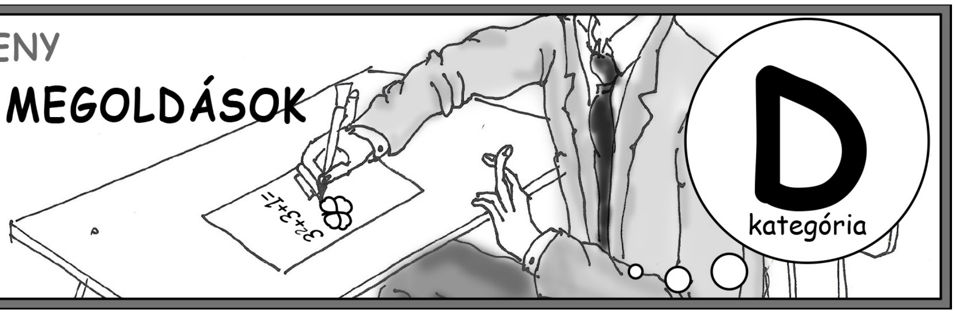


D1. Egy természetes számot *abszolút szerencsétlen*nek nevezünk, ha minden jegye 1-es vagy 3-as és a számjegyeinek összege 13. Hány abszolút szerencsétlen szám van?

Megoldás: Mivel az abszolút szerencsétlen számokban csak 1-es és 3-as jegyek szerepelnek, és adott a számjegyek összege, ezért a 3-asok száma meghatározza, hogy hány darab 1-es lesz adott számú 3-as mellett. Vagyis az abszolút szerencsétlen számokat csoportosíthatjuk aszerint, hogy hány 3-as számjegy szerepel bennük. $0, 1, 2, 3$ vagy 4 db 3-as lehet egy számban. Több nem lehet, mivel a számjegyösszeg 13. Soroljuk fel, hogy adott számú 3-as mellett hány 1-es van a számban, és hogy hány adott számjegyeket tartalmazó abszolút szerencsétlen szám van.
k db 3-ast és n db 1-est tartalmazó számból $\binom{n+k}{k}$ db van, mivel $k+n$ számjegyű számok fognak keletkezni és a 3-asok helyének eldöntése meghatározza a többi jegyet. A k darab 3-ast az $n+k$ helyre $\binom{n+k}{k}$-féleképpen lehet elhelyezni.

- 0 db 3-as mellett $13 - 0 \cdot 3 = 13$ db 1-es lesz. $\binom{13}{0} = 1$ ilyen szám van.
- 1 db 3-as mellett $13 - 1 \cdot 3 = 10$ db 1-es lesz. $\binom{11}{1} = 11$ ilyen szám van.
- 2 db 3-as mellett $13 - 2 \cdot 3 = 7$ db 1-es lesz. $\binom{9}{2} = 36$ ilyen szám van.
- 3 db 3-as mellett $13 - 3 \cdot 3 = 4$ db 1-es lesz. $\binom{7}{3} = 35$ ilyen szám van.
- 4 db 3-as mellett $13 - 4 \cdot 3 = 1$ db 1-es lesz. $\binom{5}{1} = 5$ ilyen szám van.

Az előbb felsorolt esetekben mind különböző abszolút szerencsétlen számokat kaptunk, mivel a különböző esetekben más számú 3-as jegye van a számoknak, így nem lehetnek azonosak. És minden abszolút szerencsétlen számot megkaptunk, mivel más számú 3-as nem fordulhat elő ilyen számokban. Emiatt a különböző esetekben kapott számok összege lesz az összes megfelelő szám darabszáma.
Tehát összesen $1 + 11 + 36 + 35 + 5 = 88$ darab abszolút szerencsétlen szám van.



D2. Óxisz szigetén nyulak és rókák élnek. A nyulak száma minden tavasszal megkétszereződik, ősszel minden róka megeszik egy-egy nyulat, majd a rókák száma is megkétszereződik. Ha egy róka nem jut elég táplálékhoz (azaz nincs elég nyúl a szigeten), akkor elpusztul. Most tél van, és a szigeten 24 nyúl és 2 róka él. Mennyi lesz a nyulak száma a szigeten
a) 2 év múlva?
b) 10 év múlva?
c) Mutassátok meg, hogy a szigeten élő állatok egy idő után mind kihalnak, és határozzátok is meg, hogy mikor.

Megoldás: Jelöljük a nyulak számát a szigeten n év múlva a_n-nel, a rókákét b_n-nel. Tudjuk, hogy $a_0 = 24$ és $b_0 = 2$, valamint $b_n = 2 \cdot b_{n-1}$ (ha van elég nyúl a szigeten) és $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - b_{n-1}$. Ebből kapjuk, hogy $b_n = 2 \cdot 2^n$, és belátjuk, hogy $a_n = 2^n(24 - n)$.

Teljes indukcióval dolgozunk: ha $n = 0$, $a_0 = 24 \cdot 2^0 = 24$, ez teljesül. Az első év tavaszán $24 \cdot 2 = 48$ nyúl lesz, majd ősszel kettőt megesznek a rókák, így 46 nyúl és $2 \cdot 2 = 4$ róka lesz a szigeten. Valóban, $a_1 = 2^1(24 - 1) = 46$. Tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n = 2^n(24 - n)$ teljesül. Ekkor

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - b_n = 2 \cdot a_n - 2 \cdot 2^n = 2 \cdot 2^n(24 - n) - 2 \cdot 2^n$$

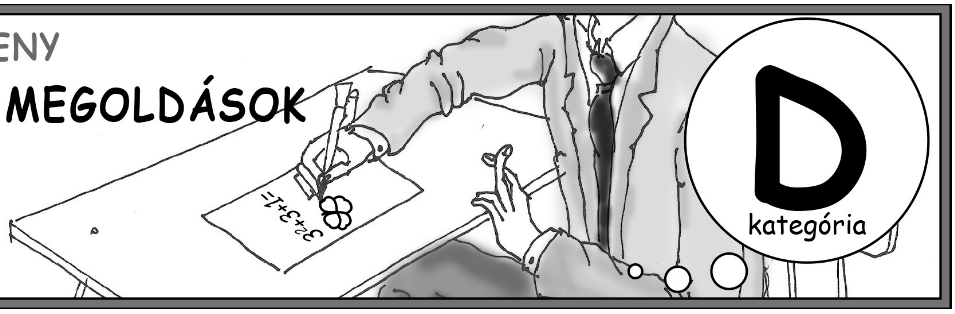
az indukciós feltevés szerint. Vagyis

$$a_{n+1} = 2 \cdot 2^n(24 - n) - 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}(24 - n - 1) = 2^{n+1}(24 - (n + 1)),$$

ezt kellett belátni.

a) , **b)** Tehát 2 év múlva $a_2 = 2^2(24 - 2) = 88$, 10 év múlva pedig $a_{10} = 2^{10}(24 - 10) = 14 \cdot 1024 = 14336$ nyúl él majd a szigeten.

c) Ha van elég nyúl, akkor a rókák szaporodnak, azonban a nyulak kihalását követő évben a rókák is kihalnak, így elég megmutatni, hogy a nyulak kihalnak. Akkor halnak ki, amikor $a_n \leq 0$ először teljesül (itt a negatív szám azt jelenenté, hogy több róka van a szigeten, mint nyúl, vagyis a nyulak elfogynak, és rókák is pusztulnak ki), vagyis $2^n(24 - n) \leq 0$. Mivel $2^n > 0$, ez csak akkor következhet be, ha $24 - n \leq 0$, vagyis $24 \leq n$. Ez a 24. évben fog bekövetkezni, vagyis 24 év múlva kihalnak a nyulak és 25 év múlva a rókák is.



D3. Keressétek meg a

$$p^q + q^p = r$$

egyenlet olyan megoldásait, ahol p, q, r pozitív prímszámok.

Megoldás: Vizsgáljuk meg p és q paritása szerint az állítást!

Ha mindkettő páratlan, akkor p^q és q^p is páratlan, tehát az összegük, r, páros. Viszont r prím, tehát $r = 2$. Mivel p és q prímek, ezért a bal oldal nagyobb, mint 2, tehát ez az eset nem lehetséges.

Ha mindkettő páros, mivel a 2 az egyetlen páros prímszám, így $r = 4+4 = 8$, ami nem prím. Tehát ez az eset sem lehetséges.

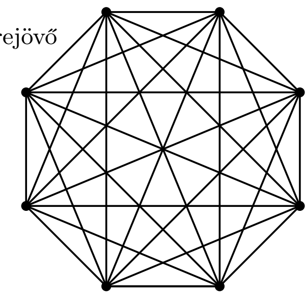
Ha az egyik páros, a másik pedig páratlan, akkor tegyük fel, hogy p a páros, tehát $p = 2$. Ekkor $2^q + q^2 = r$. Vizsgáljuk meg mindkét oldal hármas maradékát! Mivel q páratlan, 2^q hármas maradéka 2 lesz, mert $2^{páratlan} = 2^{2k+1} = 2^1 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot 4^k$, és a 4 hármas maradéka 1, tehát önmagával szorozva is 1 a hármas maradéka, és így tovább.

Ha $q > 3$, q^2 hármas maradéka 1, hiszen $q > 3$ prím, így a 3 nem osztója, tehát 1 vagy 2 maradékot ad hárommal osztva, és mindkét esetben a négyzete 1 maradékot ad hárommal osztva. Tehát ekkor a bal oldalt osztja 3, így a jobb oldalt is, viszont r prím, tehát $r = 3$. Azonban ez nem lehetséges, mert a bal oldal mindig nagyobb, mint 3.

Így csak az az eset maradt, ha $q = 3$. Ekkor a bal oldalon 17 szerepel, ami prímszám. Tehát az egyenlet megoldásai $p = 2,\ q = 3,\ r = 17$, illetve $p = 3,\ q = 2,\ r = 17$.

D4. Az ábrán egy szabályos nyolcszög oldal- és átlószakaszai láthatóak. Az ábrán létrejövő összes szöget megmértük. Milyen értékeket kaptunk?

Megjegyzés: Úgy tekintjük, hogy a nyolcszög csúcsában találkozó szakaszok is metszik egymást. Két szakasz 0° *és* 180° *közötti szögben metszheti egymást.*



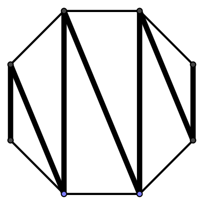
Megoldás: Hívjuk szomszédosnak (vagy 1 távolságra lévőnek) azokat a csúcsokat, amelyek között a nyolcszög kerülete mentén mindössze egy oldalszakasz választ el. Legyenek 2 távolságra lévők azok a csúcsok, amelyek között a nyolcszög kerülete mentén a rövidebb úton pontosan egy csúcs van. Hasonlóan hívjuk 3 távolságra lévőnek azokat a csúcsokat, amelyek között a nyolcszög kerülete mentén a rövidebb úton pontosan kettő csúcs van, és legyenek átellenesek (vagy 4 távolságra lévők) azokat a csúcsok, amelyek között a nyolcszög kerülete mentén a rövidebb úton pontosan három csúcs van (mindkét irányban ilyen legrövidebb út van).

Most pedig végezzük az alábbi megfigyeléseket: Ha veszünk egy tetszőleges szomszédos csúcspárt, az őket összekötő oldalszakasz párhuzamos az ő további két szomszéd csúcsukat (akik 3 távolságra vannak) összekötő átlószakasszal, továbbá az ezek maradék két szomszédjukat (akik megint 3 távolságra vannak) összekötő átló, valamint a kimaradt két csúcsot összekötő oldalszakasz is mind párhuzamos az eredeti oldalszakasszal (ez úgy bizonyítható könnyen, hogy mind a négy szakasz két végpontja a másik végpontba megy az oldalszakasz felező merőlegesére való tükrözéskor).

Mivel négy párhuzamos oldalpár van, ezért $4 \cdot 4 = 16$ átlót sikerült négy párhuzamos csoportba osztanunk. Ezek épp a szomszédos és a 3 távolságra lévő pontpárok között futó szakaszok. Jó lenne a 4, illetve 2 távolságra lévő szakaszokat is ilyen csoportokba osztani. Ezt is meg tudjuk tenni: gondoljuk meg, hogy ha veszünk egy átellenes csúcspárt, akkor az a 2 csúcs, ami mindkettőjüktől 2 távolságra van is egy átellenes csúcspárt fog alkotni, és az őket összekötő átló merőleges lesz az eredeti nagyátlóra (ami az eredeti átellenes csúcspárt köti össze). Ráadásul erre a merőleges nagyátlóra való tükrözés a maradék négy csúcsból 2-2-t egymásba visz, így az egymásba menő csúcsokat összekötő átlók merőlegesek erre a második nagyátlóra. Ami azt jelenti, hogy az eredetivel párhuzamosak. Mivel 4 különböző irányú nagyátlónk van, így $4 \cdot 3 = 12$ szakaszt sikerült ismét párhuzamossági csoportokra osztanunk. Így az összes $\binom{8}{2} = 28 = 16 + 12$ átlót sikerült 8 csoportba osztanunk aszerint, hogy milyen irányúak. Ha azt sikerül megállapítanunk, hogy ezek az irányok egymással milyen szöget zárnak be, akkor nagyon közel kerülünk a feladat megoldásához.

Négy iránynak a képviselőit könnyű megtalálnunk: ezek épp a nagyátlók, amik egy ponton mennek át, a nyolcszög középpontján. Most a maradék 4 irányból is szeretnénk a középponton átmenő képviselőt találnunk. Ezek épp a nyolcszög oldalainak felezőmerőlegesei lesznek. Ez a nyolc egyenes 16 egyenlő szögre osztja a 360°-ot, hiszen bármelyik egyenes két szomszédja szimmetrikus rá, így bármely két szomszédos szög megegyezik. Tehát 2 különböző irány között $\frac{360^\circ}{16} = 22,5^\circ$, vagy annak valamely többszöröse lehet a bezárt szög. Már csak találni kell az ábrán ilyen szögeket, és kész is leszünk: a

$22,5°, 45°, 67,5°, 90°, 112,5°, 135°$-os szögeket meg lehet találni egy csúcsnál, attól függően, hogy hány kis szöget mérünk fel az ábráról (ezekről már beláttuk, hogy egyenlők). $157,5°$-os szöget nem tudunk találni, mert ahhoz az kellene, hogy két szomszédos iránnyal (azaz $22,5°$-os szöget bezaró középponton átmenő egyenessel) párhuzamos átló valahol belül messe egymást. De ilyen nincsen, hiszen a szomszédos irányú szakaszok ilyen alakzatot feszítenek ki:



Ezek pedig csak $22,5°$-os, valamint $180°$-nál nagyobb szögeket feszítenek ki. Tehát csak a fent leírt 6 különböző nagyságú szög jelenhet meg az ábrán.

Megjegyzés: $180°$*-os szöget könnyen találunk egy belső metszéspontnál, azonban az nem két különböző átlószakasz metszéspontjaként áll elő. Ezen eset vizsgálatának hiányáért nem járt pontlevonás.*

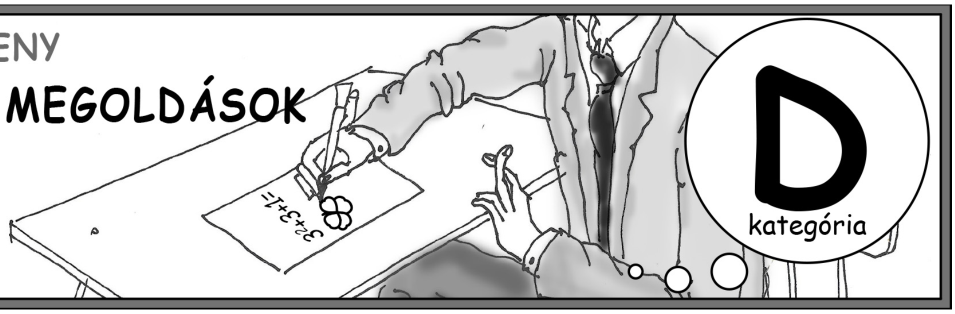
. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-12. OSZTÁLYOSOK

HELYI FORDULÓ:

2019. NOVEMBER 8.



D5. **a)** Mutassátok meg, hogy meg lehet 6 egész számot adni úgy, hogy a belőlük képzett kéttagú összegek mind különbözőek legyenek, és az így keletkezett összegeket növekvő sorba rendezve, a sorban az egymást követő két elem különbsége legfeljebb kettő legyen.
b) Bizonyítsátok be, hogy 7 ilyen számot már nem tudunk megadni.

Megoldás: **a)** Egy jó számhatos például a $\{0, 3, 4, 6, 8, 13\}$. Az ebből képzett kéttagú összegek növekvő sorrendben: $\{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 21\}$. Ezek jól láthatóan teljesítik a feladat kritériumait, mivel nincs két azonos közöttük és a két egymást követő különbsége mindenhol legfeljebb 2.

Ebből a számhatosból könnyen kaphatunk másik jó számhatosokat is például "eltolással", azaz ha minden számhoz ugyanazt adjuk hozzá, illetve "tükrözéssel", vagyis ha az összes számot (-1)-gyel megszorozzuk, mivel ettől az összegek közti különbségek nagysága nem változik.

b) Megmutatjuk, hogy nemcsak 7 szám nem adható meg, hanem több sem.

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy megadható $n > 6$ szám ilyen módon. Ezek mind különbözőek, mert ha $a_k = a_l$, ahol $k \neq l$, ekkor bármely $m \neq k$ és $m \neq l$-re igaz, hogy a következő páronkénti összegek egyenlőek: $a_m + a_l = a_m + a_k$ és mivel $n \geq 6$, ezért létezik ilyen m.

Tehát feltehető, hogy $a_1 < a_2 \ldots < a_n$. Ekkor a páronkénti összegek közül tudjuk, hogy a két legkisebb az $a_1 + a_2$ és $a_1 + a_3$, mivel a két legkisebb szám összege a legkisebb $(a_1 + a_2)$ és a következő legnagyobb az $a_1 + a_3$, mivel bármely más összegnél $(a_i + a_j, j > 3, j > i)$ a nagyobb összeadandó nagyobb, mint itt $(a_j > a_3)$ és a kisebb összeadandó nem lehet kisebb.

Hasonló módon tudjuk, hogy a két legnagyobb páronkénti összeg $a_n + a_{n-1}$ és az $a_n + a_{n-2}$. Ezekről az egymást követő páronkénti összegekről tudjuk, hogy a különbségük legfeljebb 2, és mivel nem azonosak, ezért minimum 1. Vagyis $1 \leq (a_n + a_{n-1}) - (a_n + a_{n-2}) \leq 2$, tehát $1 \leq a_{n-1} - a_{n-2} \leq 2$. Hasonlóan $1 \leq a_3 - a_2 \leq 2$. Ez a két különbség nem lehet azonos, mert akkor $a_{n-1} + a_2$ egyenlő lenne $a_{n-2} + a_3$-mal. (Mivel $n > 6$, ezért ez négy különböző szám).

Hasonló módon nem lehet az n szám közt 2 olyan pár 4 különböző számból, melyekre $a_i - a_j = a_k - a_l$, mivel akkor a keresztösszegeikből képzett páronkénti összegek egyenlőek lennének, azaz $a_i + a_l = a_k + a_j$ lenne.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a_3 - a_2 = 1$ és $a_{n-1} - a_{n-2} = 2$, mivel ha fordítva lennének, akkor az **a)** részben mutatott tükrözéssel (azaz (-1)-gyel való végigszorzással) ilyen alakú szám n-est kapunk.

Ekkor tudjuk, hogy $a_4 - a_3 \geq 3$, mivel ha $a_4 - a_3 = 1$, akkor $a_4 - a_2 = 2$ és $a_{n-1} - a_{n-2} = 2$ keresztösszegei lennének egyenlőek, ha pedig $a_4 - a_3 = 2$, akkor $a_4 - a_3 = 2$ és $a_{n-1} - a_{n-2} = 2$ keresztösszegei lennének egyenlőek. És mivel $n \geq 7$, ezért $(n-2) \geq 4$, tehát a keresztösszegek tényleg léteznek, mivel 4 számról van szó és nincs átfedés köztük.

De akkor a páronkénti összegek növekvő sorrendjében az $a_1 + a_3$ után nem jöhet $a_1 + a_4$, mivel ott a különbség 2-nél nagyobb lenne. Így csak az $a_2 + a_3$ összeg jöhet az $a_1 + a_3$ után a sorban, mivel ha $a_i + a_j$ jönne (ahol $i < j$), akkor ismert, hogy $i > 1$, hiszen ha $i = 1$ lenne, akkor a következő összeg az lenne, amiben $j = 4$, de azt láttuk, hogy nem lehet. Tehát $j > i > 2$ teljesül és az $i = 2, j = 3$ a legkisebb ilyen összeg, mert különben legalább az egyik tag nagyobb lenne és a másik tag sem lehet kisebb.

Ebből tudjuk, hogy $(a_2 + a_3) - (a_1 + a_3) \leq 2$, vagyis $a_2 - a_1 \leq 2$. Azaz $a_2 - a_1$ vagy 1 vagy 2. De ezek közül egyik sem állhat fenn, mivel ha $a_2 - a_1 = 1$, akkor $a_3 - a_1 = 2$ (mivel ismert $a_3 - a_2 = 1$) és $a_{n-1} - a_{n-2} = 2$ keresztösszegei lennének egyenlőek. Ha pedig $a_2 - a_1 = 2$, akkor $a_2 - a_1 = 2$ és $a_{n-1} - a_{n-2} = 2$ keresztösszegei lennének egyenlőek.

Tehát ha $n \geq 7$, akkor egy egy szám n-esben, ahol nem jelenik meg a páronkénti összegek növekvő sorában 2-nél nagyobb rés, biztosan megjelenik két azonos összeg. Tehát 7 vagy több számot már nem lehet így megadni.