KIS DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

5-6. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. JANUÁR 10-11.

A

kategória

A1. A következő kifejezésben minden □-be egy + vagy · jelet írhattok:

$$3\square 3\square 3\square 3\square 3$$

Hányféle végeredménye lehet egy így kapott műveletnek? Mutassatok példát minél több különböző értékre. Ha úgy érzitek, hogy ennél többféle eredményt már nem lehet kihozni, nem kell megindokolnotok, hogy miért nem. *(Mindegyik □-be kell írni valamelyik jelet. Más jeleket, például zárójelet nem használhattok.)*

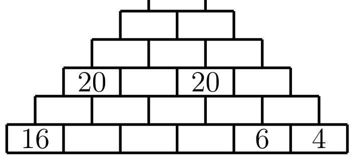
Megoldás: Mind a 4 helyre kétféle jelet írhatunk, ezért összesen $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$-féleképp tudjuk a műveleti jeleket a négyzetekbe beírni.

Nézzük meg, hogy mi lehet az összeg a szorzásjelek száma alapján:

- Ha egy darab sincs: az összeg $3+3+3+3+3 = 15$ lesz, ezt csak így kaphatjuk meg.
- Egy darab esetén: az összeg $3+3+3+3\cdot 3 = 18$ lesz a szorzásjel helyétől függetlenül. Ezt négyféleképpen kaphatjuk meg, mert a szorzásjel négy helyre kerülhet.
- Kettő darab esetén: ha a két jel nem szomszédos, akkor az összeg $3+3\cdot 3+3\cdot 3 = 21$ lesz, ezt háromféleképpen tudjuk megkapni, mert ekkor az összeg két $3\cdot 3$-ból és egy különálló 3-asból áll, ami a $3\cdot 3$-ak közé, jobb, vagy bal oldalára kerülhet.
  Ha pedig szomszédosak: akkor az összeg $3+3+3\cdot 3\cdot 3 = 33$ lesz, ebből is 3 darab van, mert most a $3\cdot 3\cdot 3$ kerülhet a 3-asok közé, jobb, illetve bal oldalára.
- Három darab esetén: ha nem mindegyik szorzásjel szomszédos, akkor az összeg $3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3 = 36$ lesz, ezt kétféleképpen kaphatjuk meg, ha a + jel a 2., vagy 3. helyre kerül.
  Illetve ha szomszédosak, akkor a + jel az 1., vagy 4. helyre kerül és az összeg $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3 = 84$ lesz, amiből szintén kettő van.
- Négy darab esetén: az összeg $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 243$ lesz, amit csak így kaphatunk meg.

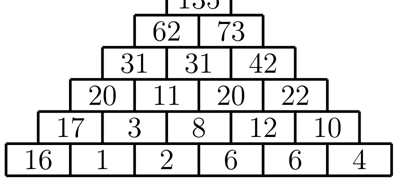
Ez összesen $1+4+3+3+2+2+1 = 16$-féle lehetőség, így megnéztük az összes lehetséges eredményt és hétféle különböző összeget kaptunk, tehát csak ez a hétféle végeredménye lehet a műveletünknek: 15, 18, 21, 33, 36, 84, 243.

A2. Töltsétek ki a piramist pozitív egész számokkal úgy, hogy minden (nem legalsó sorbeli) szám az alatta levő két szám összege legyen! *Ha nem tudjátok teljesen kitölteni a piramist, akkor is érdemes beadnotok, hiszen részben kitöltött piramisra is lehet pontokat kapni. Indokolnotok nem kell a feladatban.*

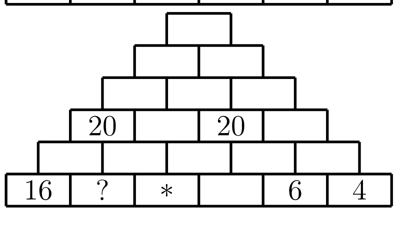


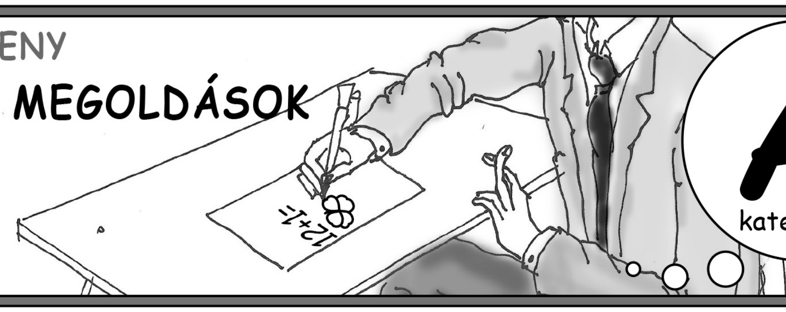
Megoldás:

A piramist csak egy módon lehet helyesen kitölteni:

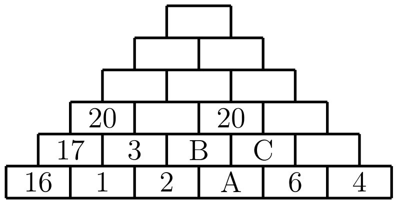


Ahhoz, hogy ezt belássuk, vizsgáljuk meg, hogy milyen szám állhat a kérdőjel helyén.





A bal oldali 20-as a ?-től balra felfelé, illetve jobra felfelé elhelyezkedő szám összege, amik ebben a sorrendben 16+? és ? + ∗, vagyis a 20-as a 16, a ? kétszerese és a ∗ összege. Vagyis a ∗ és a ? kétszeresének az összege 4. Ez csak úgy lehetséges, ha a ? egy és a ∗ kettő, mert ha ? nagyobb lenne, akkor a ∗ nem lenne pozitív egész szám.
Ebben az esetben 16 és ? összege 17 , valamint a ? és a ∗ összege 3.
Már csak az A mezőben levő számot kell meghatároznunk, és ki tudjuk tölteni az egész piramist. Tudjuk, hogy 2 és A összege B, míg 6 és A összege A, valamint B és C összege 20. Ezért 2, kétszer A és 6 összege 20, ami csak akkor lehetséges, ha A hattal egyenlő.



A3. Antal, András, Anita, Barbara, Barnabás, Dani és Emese ül egy kör alakú asztal körül. Tudjuk, hogy Antal két lány közt ül. A legidősebb gyerektől jobbra Barbara, balra pedig András foglal helyet. Azt is tudjuk, hogy nem ül egymás mellett két olyan gyerek, akiknek azonos betűvel kezdődik a keresztneve. Milyen sorrendben ülnek a gyerekek az asztal körül? *Írjátok le a gondolatmenetetek lépéseit is!*

Megoldás: Antal mindkét szomszédja lány, ezért csak Anita, Barbara és Emese lehetnek a szomszédai. Mivel Antalnak és Anitának ugyanazok a kezdőbetűi, így ők nem ülhetnek egymás mellett, tehát Antal Barbara és Emese között ül.

Tudjuk, hogy a legidősebb gyerek Barbara és András között ül, így nem kezdődhet A-val vagy B-vel a neve. Az előbb láttuk, hogy Barbara és Emese nem ülnek egymás mellett, így a legidősebb gyerek csak Dani lehet.

Tehát Barbarának Dani a bal, így Antal jobb oldalán ül. Valamint Antal másik oldalán Emese foglal helyet.

Már csak Anitának és Barnabásnak kell meghatároznunk a helyét. Az eddigiek alapján tudjuk, hogy egyikük András bal oldalán, másikuk Emese jobb oldalán ül majd. András és Anita nem ülhet egymás mellett, mivel mindkettőjük neve A-val kezdődik, így András bal oldalán Barnabás ül, Emese jobb oldalán pedig Anita.

A sorrend tehát (Andrástól kezdve, balról jobbra): András, Dani, Barbara, Antal, Emese, Anita és Barnabás.

A4. Hófehérke egyik reggel arra ébredt, hogy eltűnt az összes almáspite, amit előző este sütött. Kikérdezte hát a törpéket, hogy mit tudnak az esetről. A válaszaik a következők voltak:

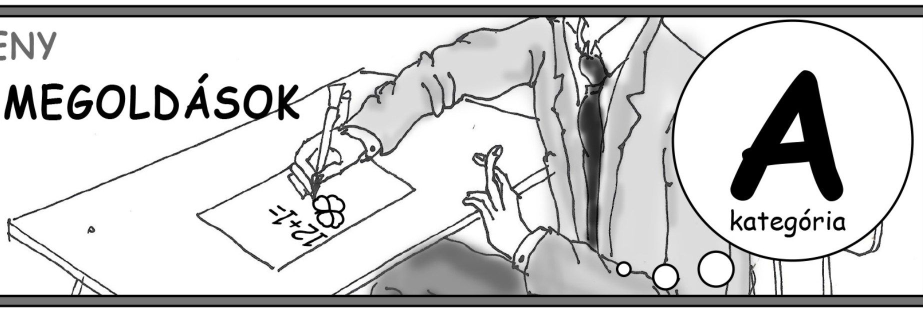
Tudor: *Nem én ettem meg.*
Vidor: *Nem Kuka volt.*
Morgó: *Vidor, Szundi vagy Szende volt.*
Szundi: *Nem én voltam!*
Szende: *Morgó vagy Szundi volt.*
Hapci: *Tudor vagy Szende a tettes.*

Kuka pedig – mivel beszélni nem tud – egy cetlit adott a következő felirattal: *„Szundi igazat mond.”*
Az almáspitét a hét törpe egyike ette meg. Ki volt az, ha tudjuk, hogy a tettes hazudott, a többiek viszont mind igazat állítottak? *Írjátok le a gondolatmeneteteket is! Ha nem jöttök rá a válaszra, de néhány törpét ki tudtok zárni, azért is kaphattok pontokat.*

Megoldás: Hapci vagy Szende volt a tettes, mert nem mondhatnak mindketten igazat.

Ha Hapci ette meg az almáspitét, akkor Morgó állítása hamis, így ez nem lehetséges, mert a tettesen kívül a többieknek igazat kell mondaniuk.

Ha Szende volt a tettes, akkor a többiek valóban igazat mondanak és ő hazudik, tehát Szende ette meg az almáspitét.



A5. Albrecht 1 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögekből és négyzetekből épít olyan síkidomokat, amelyeknek kerülete 13 cm. A síkidomokat alkotó háromszögeket és négyzeteket úgy ragasztja össze, hogy ne fedjék egymást, és teljes élek mentén illeszkedjenek. Megvalósítható-e, hogy egy ilyen síkidom

a) 1 db háromszögből és négyzetekből álljon?

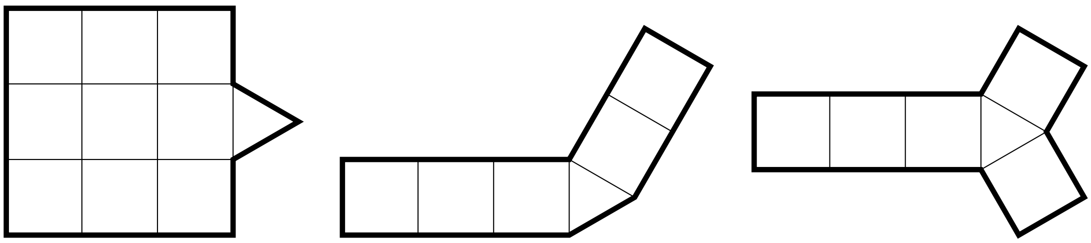
b) ugyanannyi négyzetből, mint háromszögből álljon?

c) csak háromszögekből álljon?

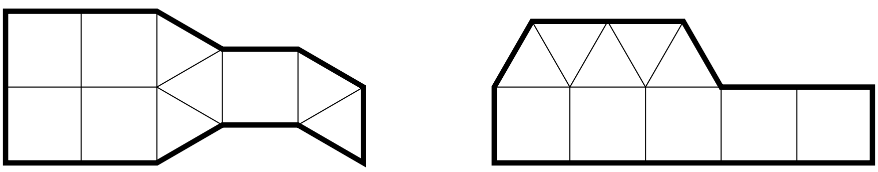
d) csak négyzetekből álljon?

Ha megvalósítható, rajzoljatok le egy megvalósítást. Ha nem, indokoljátok meg, hogy miért nem.

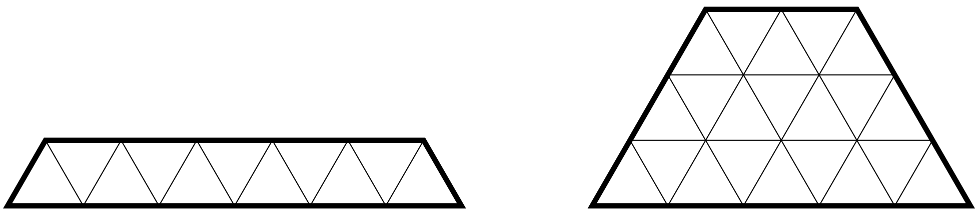
Megoldás: a) Megvalósítható, három lehetséges példa (a sok-sok közül) látható az alábbi ábrákon. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a második ás harmadik ábra 5 négyzetből és 1 háromszögből áll. Ennél kevesebb darabbal nem lehet megvalósítani.



b) Megvalósítható, két lehetséges példa (a sok közül) látható az alábbi ábrákon.
Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a mi példáink 5 négyzetből és 5 háromszögből állnak, ennél kevesebb darabbal nem lehet megvalósítani.



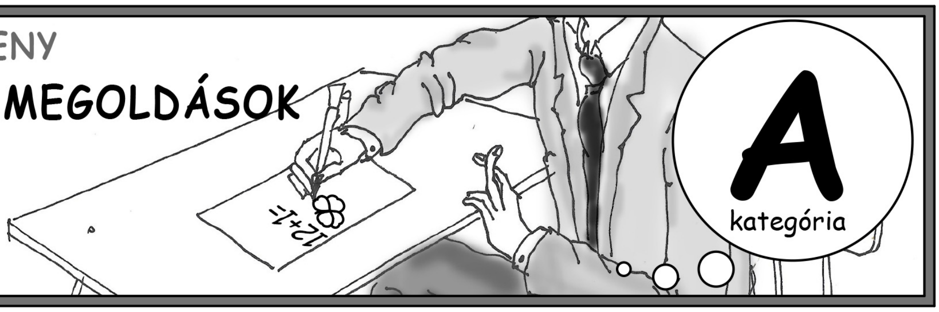
c) Megvalósítható, két lehetséges példa (a sok közül) látható az alábbi ábrákon.



d) Nem valósítható meg csak az 1 cm oldalhosszúságú négyzeteket használva.

Ehhez először nézzük meg hogy milyen módokon tud változni a már lent lévő síkidom kerülete egy újabb négyzet lerakásakor. Ebből négy eset van, az alapján, hogy az új négyzet 1, 2, 3, vagy 4 oldallal csatlakozik a többi kockához.

- Ha 1 oldallal csatlakozik, akkor 1 oldalát letakarja a már lent lévő síkidomnak, viszont a maradék 3 oldala hozzáadódik a kerülethez. Így 3 cm − 1 cm = 2 cm-rel növekszik a síkidom kerülete.
- Ha 2 oldallal csatlakozik, akkor 2 oldalt takar le és 2 oldallal növeli a kerületet. Így nem változtat a kerületen.
- Ha 3 oldalhoz csatlakozik, akkor 3 oldalt takar le és 1 oldallal növeli a kerületet. Így a síkidomnak 1 cm − 3 cm = −2 cm-rel nő, vagyis 2 cm-rel csökken a kerülete.



- Ha 4 oldalhoz csatlakozik (ami csak úgy lehetséges, ha az eddigi síkidomban van egy „lyuk”), akkor csak letakar 4 külső oldalt. Így 4 cm-rel csökkenti a síkidom kerületét.

Mivel mind a négy esetben páros számmal változott a lent lévő síkidom területe, amikor leraktunk egy újabb síkidomot és a legelső lerakott négyzetnek páros oldala van, ezért csak cm-ben mérve páros szám lehet a síkidom területe. Vagyis a 13 cm nem lehetséges.

Alternatív indoklások

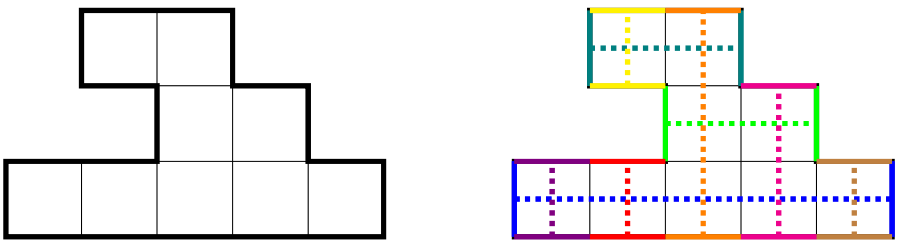
1. módszer A bizonyításhoz képzeljük el, hogy egy tetszőleges, csak négyzetekből összeragasztott síkidomot a fenti ábrákhoz hasonlóan lerajzoltunk, vastag vonallal jelölve a külső határokat, míg vékonyabb vonallal jelölve a ragasztások helyét. A vastag vonalak összhossza éppen megegyezik a síkidom kerületével (K). Ha ehhez hozzáadjuk a ragasztásokat jelölő vékony vonalak összhosszának (R) kétszeresét, éppen a négyzetek számának (N) a négyszeresét kell kapnunk, egyenlettel felírva:

$$K + 2 \cdot R = 4 \cdot N.$$

Ez azért van így, mert a síkidomot alkotó kis négyzetek minden oldala az ábra valamelyik vonalára esik, a vékony vonalaknál mindig két-két ilyen négyzetoldal találkozik, míg a vastag vonalak mindig csak egy négyzet oldalát jelentik.

Következésképpen a kerület megkapható úgy, hogy a négyzetek számának négyszereséből kivonjuk a vékony vonalak összhosszának kétszeresét, azaz (cm-ben mérve) egy páros számból egy másik páros számot. Így a kerület is csak páros lehet.

2. módszer



Tekintsünk egy tetszőleges négyzetoldalt, amely része a síkidom külső határának. Induljunk el ennek az oldalnak a felezőpontjáról a síkidom belseje felé. Addig haladjunk, amíg újra el nem érünk a síkidom külső határáig. Mivel a négyzetek teljes élük mentén vannak összeragasztva, így egy másik négyzetoldal felezőpontjában fogjuk újra elérni a síkidom szélét. Nevezzük ezt a másik négyzetoldalt a kiindulási oldalunk párjának. Így a síkidom kerületének minden 1 cm-es darabjához egyértelműen találtunk egy párt, tehát a kerület csak páros lehet.

3. módszer. Ha csak négyzeteket használunk fel, akkor nézhetjük úgy is, hogy egy 1 cm-es négyzetrácson rajzolunk a vonalak mentén egy sokszöget. A négyzetrács metszéspontjait sakktáblaszerűen színezzük ki feketére és fehérre. Ekkor a sokszög minden 1 cm-es oldaladarabja egy fekete és egy fehér pontot köt össze.

Válasszuk ki az egyik csúcsot, legyen az fekete. Menjünk végig a kerülete mentén, ekkor páratlan sok 1 cm-es lépés után fehér, páros sok lépés után fekete csúcsban vagyunk. Ha körbemegyünk a kerületen, azaz visszaérünk a kiindulási pontba, akkor fekete mezőbe érkezünk, vagyis a kerület csak páros hosszú lehet.

A6. **(Játék)** Adott egy 2×2-es táblázat, és hozzá mindkét játékosnak van 3 db korongja. A játék során felváltva tesznek le ezekből egyet-egyet a táblázat tetszőleges mezőjére. A második játékos akkor nyer, ha a játék végén minden mezőben különböző számú korong található. (Azaz 0, 1, 2, 3 a kiosztás a végén valamilyen sorrendben). Minden egyéb esetben pedig a kezdő játékos nyer.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek-e bújni.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. Mivel a második játékosnak az a célja, hogy minden mezőn különböző számú (azaz 0, 1, 2 és 3) korong legyen, így a második játékos biztosan veszít, ha:

- Van olyan mező, ahol legalább négy korong van. Ekkor csak két korong jut a maradék három mezőre, amik $(1, 1, 0)$, vagy $(2, 0, 0)$ módon oszlanak el. Mind a két esetben lesz két mező, azonos számú koronggal.
- Valamint akkor is, ha minden mezőn van korong, mert ha mindenhol van egy korong, akkor két korong marad, ami maximum két helyre kerülhet. Így legalább kettő darab 1 korongos mező lesz.

Miután a kezdő játékos lerakta az első korongját, a második játékosnak két lépése marad:

- Ha a második játékos ugyanarra a mezőbe teszi első korongját, ahol már volt korong, akkor ezen a mezőn 2 korong lesz. Így, ha az első játékos erre a mezőre rakja a maradék 2 korongját, akkor itt 4 darab lesz, vagyis mindenképpen ő nyer.
- Ha a második játékos egy másik mezőre teszi első korongját, akkor kettő mezőben is lesz egy-egy korong. Így, ha a kezdő játékos a maradék két üres mezőbe teszi le a korongjait, akkor minden mezőben lesz legalább 1 darab. Ebben az esetben szintén az nyer aki kezd.

Ezzel megmutattuk, hogy az első játékosnak van nyerő stratégiája.