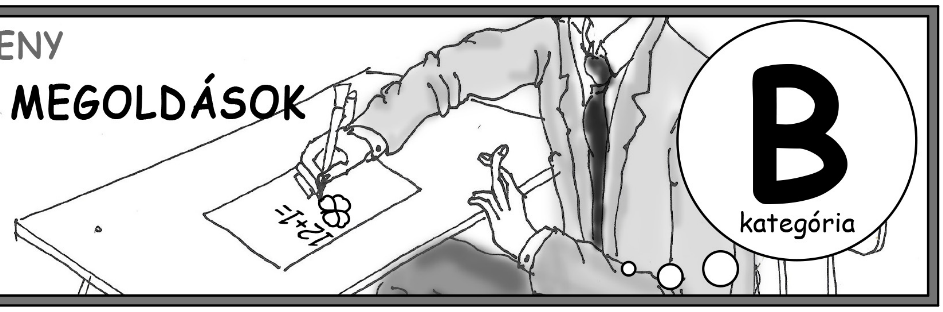
KIS DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

7-8. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. JANUÁR 10-11.



B

kategória

B1. A következő kifejezésben minden $\square$-be egy $+$ vagy $\cdot$ jelet írhatunk:

$$3\square 3\square 3\square 3\square 3\square 3$$

Hányféle végeredménye lehet egy így kapott műveletnek? Mutassatok példát minél több különböző értékre. Ha úgy érzitek, hogy ennél több féle eredményt már nem lehet kihozni, nem szükséges megindokolnotok, hogy miért nem. *(Mindegyik $\square$-be kell írni valamelyik jelet. Más jeleket, például zárójelet nem szabad használni.)*

Megoldás: Összesen $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$-féleképp tudjuk a műveleti jeleket a négyzetekbe beírni, mivel mind az 5 helyre kétféle jelet írhatunk. Nézzük meg, hogy mi lehet az összeg a szorzásjelek száma alapján:

0 szorzásjel. Ha egy darab szorzásjel sincs: akkor $3+3+3+3+3+3 = 18$ az összeg, ezt csak így kaphatjuk meg.

1 szorzásjel. Egy darab szorzásjel esetén a végeredmény $3+3+3+3+3\cdot 3 = 21$ lesz, ezt ötféleképpen kaphatjuk meg, mert a szorzást 5 helyre tehetjük.

2 szorzásjel. Két darab szorzásjel esetén, ha nincs két szorzásjel egymás mellett, akkor a végeredmény $3\cdot 3+3\cdot 3+3+3 = 24$ lesz, ezt hatféleképpen tudjuk megkapni, mert a kettő kéttagú szorzat hat különböző módon helyezkedhet el egy négytagú összegben.

$3\cdot 3+3\cdot 3+3+3 = 24$ $\quad$ $3\cdot 3+3+3\cdot 3+3 = 24$ $\quad$ $3\cdot 3+3+3+3\cdot 3 = 24$

$3+3\cdot 3+3\cdot 3+3 = 24$ $\quad$ $3+3\cdot 3+3+3\cdot 3 = 24$ $\quad$ $3+3+3\cdot 3+3\cdot 3 = 24$

Ha a két szorzásjel egymás mellett van, akkor a végeredmény $3\cdot 3\cdot 3+3+3+3 = 36$ lesz, ezt négyféleképpen tudjuk megkapni, mert a háromtagú szorzat négy helyre kerülhet a négytagú összegben.

$3\cdot 3\cdot 3+3+3+3 = 36$ $\quad$ $3+3\cdot 3\cdot 3+3+3 = 36$

$3+3+3\cdot 3\cdot 3+3 = 36$ $\quad$ $3+3+3+3\cdot 3\cdot 3 = 36$

3 szorzásjel. Három darab szorzásjel esetén: ha ezek egyike sem szomszédos, akkor az összeg $3\cdot 3+3\cdot 3+3\cdot 3 = 27$ lesz, amit csak így kaphatunk meg.
Ha kettő szomszédos, egy pedig nem, akkor az összeg $3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3+3 = 39$ lesz, amit hatféleképpen kaphatunk meg, mert háromféle elemünk van (háromtagú, kéttagú, egytagú szorzat) és azt hatféleképpen tudjuk sorba rendezni.

$3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3+3 = 39$ $\quad$ $3\cdot 3\cdot 3+3+3\cdot 3 = 39$ $\quad$ $3+3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3 = 39$

$3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3+3 = 39$ $\quad$ $3\cdot 3+3+3\cdot 3\cdot 3 = 39$ $\quad$ $3+3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3 = 39$

Ha pedig mindhárom szorzásjel szomszédos, az összeg $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3+3 = 87$ lesz, amit három módon kaphatunk meg, mivel a négytagú szorzatot 3 helyre tudjuk letenni.

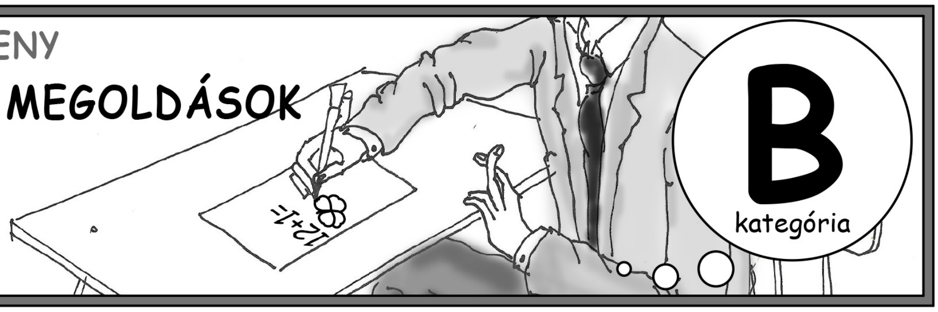
$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3+3 = 87$ $\quad$ $3+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3 = 87$ $\quad$ $3+3+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 87$

4 szorzásjel. Négy darab szorzásjel esetén: ha mind szomszédosak, akkor az összeg $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3 = 246$ lesz, ami kétféleképpen jöhet ki, az öttagú szorzatot két helyre tehetjük le.

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3 = 246$ $\quad$ $3+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 246$

Ha három szomszédos és egy nem, akkor az összeg $3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 90$, amit kétféleképpen kaphatunk meg, hiszen lehet az elején és a végén a négytagú szorzat.

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3 = 90$ $\quad$ $3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 90$



Ha két-két szomszédos szorzásjel van, akkor $3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ a végeredmény, amit csak így kaphatunk meg.

5 szorzásjel. Öt darab szorzásjel esetén a végeredmény $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ lesz, ezt csak így kaphatjuk meg.

Összefoglalás. Ez összesen $1+5+6+4+1+6+3+2+2+1+1 = 32$ lehetőség, tehát az összes lehetőséget megvizsgáltuk, ezek során a következő 11-féle végeredményt kaptuk: $18, 21, 24, 27, 36, 39, 54, 87, 90, 246, 729$.

B2. Van egy digitális óra, mely egy nap 00:00:00-tól 23:59:59-ig jelzi az időt. Egy nap alatt hány másodpercen keresztül mutat az óra
a) legalább 5 darab 1-est?
b) csak 1-est és 3-ast?

Megoldás: Arra kell figyelni, hogy az órákat jelölő szám 00 és 23, míg a perceket, illetve másodperceket jelölő 00 és 59 közötti érték lehet.
a) Vizsgáljuk meg, hogy hány másodpercig jelenik meg öt egyes az óra kijelzőjén attól függően, hogy hol nincsen egyes:

- Ha mind a hat számjegy 1-es, az pontosan egy másodpercig látszik (amikor 11:11:11-et mutat az óra).
- Ha csak az első számjegy nem 1-es, akkor vagy 0-nak, vagy 2-esnek kell lennie, ez összesen naponta két másodpercet jelent (01:11:11 és 21:11:11).
- Ha csak a második számjegy nem 1-es, akkor az bármi lehet (kivéve természetesen 1-est), ez 9 másodpercet jelent egy nap (10:11:11, 12:11:11, 13:11:11,. . . , 19:11:11).
- Ha csak a harmadik számjegy nem 1-es, akkor az lehet 0, vagy 2-től 5-ig bármi, ez 5 másodperc egy nap (11:01:11, 11:21:11, 11:31:11, 11:41:11, 11:51:11).
- Ha csak a negyedik számjegy nem 1-es, akkor az bármi lehet (kivéve természetesen 1-est), ez 9 másodpercet jelent egy nap (11:10:11, 11:12:11, 11:13:11,. . . , 11:19:11).

Az utolsó két számjegynél ugyanaz a helyzet, mint az előző kettőnél:

- Ha csak az ötödik számjegy nem 1-es, akkor az lehet 0, vagy 2-től 5-ig bármi, ez 5 másodperc egy nap (11:11:01, 11:11:21, 11:11:31, 11:11:41, 11:11:51).
- Ha csak a hatodik számjegy nem 1-es, akkor az bármi lehet (kivéve természetesen 1-est), ez 9 másodpercet jelent egy nap (11:11:10, 11:11:12, 11:11:13,. . . , 11:11:19).

Ez összesen $1 + 2 + 9 + 5 + 9 + 5 + 9 = 40$ másodperc.

b) Ha egy ilyen időpontot mutat az óra, akkor:

- Az utolsó két számjegy (a másodpercek) 11, 13, 31 és 33 lehet.
- A második két számjegy (a percek) is a fenti négy érték egyike.
- Az első két számjegy (az órák) viszont csak 11 és 13 lehet.

Ez összesen $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ lehetőség, mind pontosan egy-egy másodpercig látszanak. Így egy nap 32 másodpercig látható ilyen szám az órán.

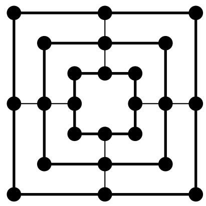
B3. Albrecht 1 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögekből és négyzetekből épít olyan síkidomokat, amelyeknek kerülete 13 cm. A síkidomokat alkotó háromszögeket és négyzeteket úgy ragasztja össze, hogy ne fedjék egymást, és teljes élek mentén illeszkedjenek. Megvalósítható-e, hogy egy ilyen síkidom

a) 1 db háromszögből és négyzetekből álljon?
b) ugyanannyi négyzetből, mint háromszögből álljon?
c) csak háromszögekből álljon?
d) csak négyzetekből álljon?

Ha megvalósítható, rajzoljatok le egy megvalósítást. Ha nem, indokoljátok meg, hogy miért nem.

A **B3.** feladat megegyezett az A kategória 3. feladatával, megoldása az A kategória megoldókulcsában olvasható.

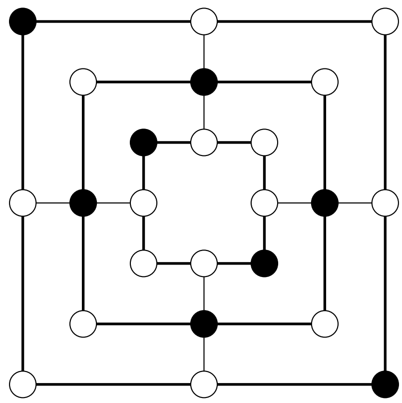
B4. A malom egy kétszemélyes játék, melynek a táblája az ábrán látható. Aladár megpróbál a fekete pontokra minél több egyszínű korongot felrakni úgy, hogy közben ne alakuljon ki malom, azaz egyik egyenes vonalon se legyen meg a 3 korong. Legfeljebb hány korongot tud a táblára helyezni? *Mutassatok példát minél több korongra, és azt is próbáljátok megindokolni, hogy többet nem lehet.*

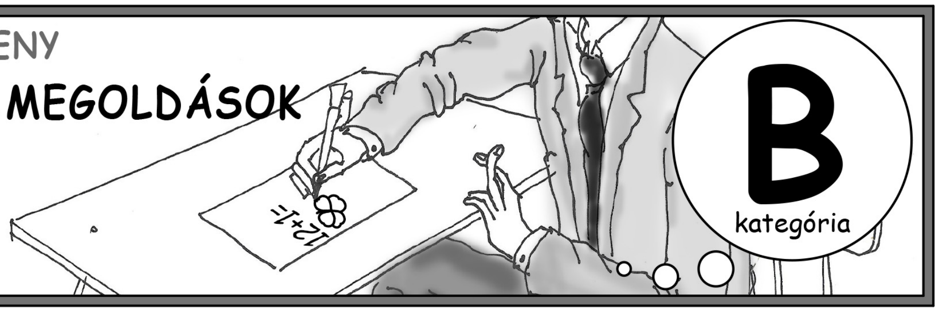


Megoldás: Először is nézzük meg, hogy a táblán hány helyen tud kialakulni vízszintesen malom! Összesen 8 ilyen hely van. Mindegyikükre legfeljebb 2 korongot rakhatunk, mivel ezen helyek nincsenek átfedésben. Így legfeljebb 16 korongot tud lerakni Aladár úgy, hogy ne essen 3 egy ilyen vízszintes helyre, mert ha Aladár több, mint 16 korongot rak le, akkor biztosan kialakul malom.

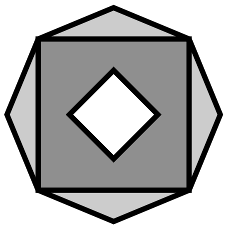
Tehát ha tudunk egy olyan példát mutatni, ahol Aladár lerakott 16 korongot malom kialakulása nélkül, akkor megmutattuk, hogy ez a legnagyobb szám, amelyre Aladár le tudja helyezni a korongokat malom nélkül.

Alább látható egy példa 16 korongra (a fehér korongokat rakta le Aladár):

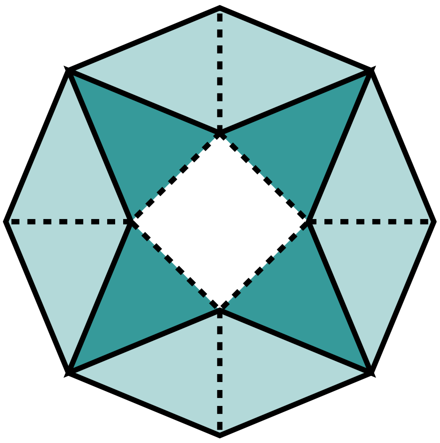




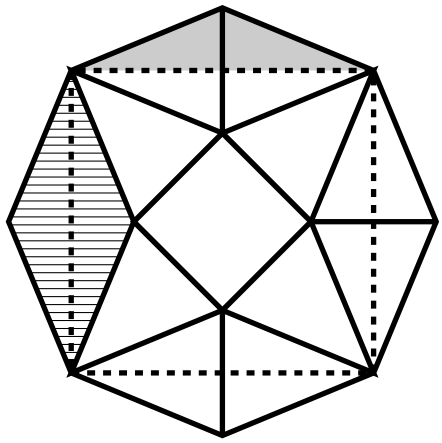
B5. Abigélnek van egy szabályos nyolcszög alakú szőnyege. A szőnyeg az ábra szerint három különböző színű anyagból készült. A különböző színű részek közti határvonalak egy kisebb és egy nagyobb négyzetet alkotnak. A kis négyzet csúcsait tükrözve a nagy négyzet oldalaira, éppen a nyolcszög négy csúcsát kapjuk. Mekkora a szélén levő, világosszürke részek összterülete, ha a sötétszürke darab területe 114 cm^2?



Megoldás:



1. ábra



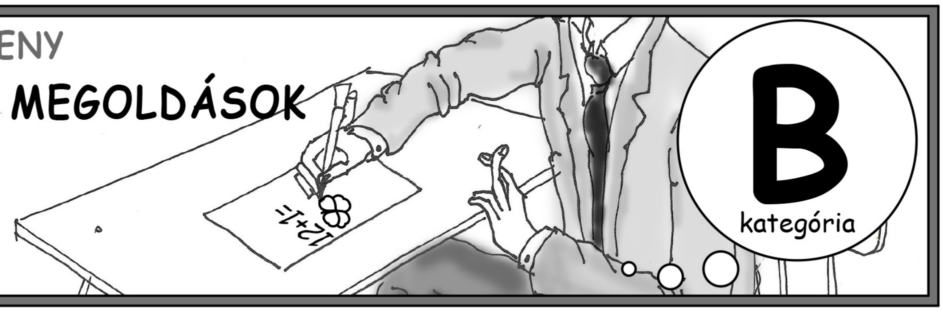
2. ábra

Először osszuk fel a szőnyeget az 1. ábrán látható módon. Azt állítjuk, hogy az 1. ábrán látható 12 színes hátterű háromszög mind egyenlőszárú és egybevágó egymással. Az, hogy tényleg egyenlő szárúak, sőt a száraik egyforma hosszúak, az következik abból, hogy az 1. ábrán folytonos vonallal berajzolt szakaszok mind egyforma hosszúak, hiszen mind a szabályos nyolcszög oldalai, illetve ezek tükörképei.

Azt kell még belátnunk, hogy a szárszögeik is ugyanakorák, mind 45 fokosak. Ehhez felhasználjuk azt a tényt, hogy a szabályos nyolcszög szögei 135 fokosak. Tekintsük a 2. ábra szürke hátterű háromszögét. Ez is egyenlőszárú, szárszöge a szabályos nyolcszögé, tehát az alapon fekvő szögeinek nagysága: $\frac{180°-135°}{2} = 22{,}5°$. Az 1. ábra világosabb háromszögeinek a szárszöge egy ilyen szögből és a tükörképéből tevődik össze, így összesen tényleg 45°. A szabályos nyolcszög csúcsainál pedig két világos és egy sötét háromszög találkozik a szárszögével, tehát a sötét háromszög szárszöge is $135° - 2 \cdot 45° = 45°$.
Ezzel beláttuk, hogy az eső ábrán mind a 12 színes háromszög egybevágó, tehát egyenlő területű is.

Tekintsük most a második ábra szürke háromszögét. Ennek területe is megegyezik az első ábra szürke háromszögeivel. Valóban: a második ábra sraffozott négyszöge előáll úgy is, hogy kettőt összeragasztunk a 2. ábra szürke háromszögéből, de úgy is, hogy kettőt összeragasztunk az 1. ábra világos színes szögeiből.

Mindez azt jelenti, hogy ha egy berajzolt háromszög területe T, akkor Abigél szőnyegén a kétféle szürke részek összeterülete $12T$, ebből világosszürkével jelzett rész területe $4T$, tehát a sötétszürkével jelölt részre marad $8T$. Vagyis ha a sötétszürke rész területe 114 cm^2, akkor a világosszürke rész területe $\frac{114}{2}$ cm^2 = 57 cm^2.



B6. **(Játék)** A játék során egy öt mezőből álló táblára fogunk elhelyezni tíz korongot. A játék elején a szervező egy korongot felhelyez az egyik mezőre, és ezután kezdődik a játék. Minden körben a kezdőjátékos egy korongot helyez a táblára, majd ezután a második játékos tesz le két korongot. (A két korongot lehet azonos, illetve különböző mezőkre is tenni.) A játék akkor ér véget, amikor a 10. korong felkerül a táblára. A második játékos akkor nyer, ha a játék végén minden mezőn különböző számú korong áll. A kezdő pedig akkor nyer, ha van két olyan mező, amelyen azonos számú korong áll.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek-e bújni.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Az indoklás során a játék helyzeteit ilyen számötösökkel fogjuk jellemezni: $(2,1,1,0,0)$ – ez azt jelenti, hogy van egy mező, amelyen éppen 2 korong van, két mező, amelyen 1 korong van, és két mező, amely üres. Az egyes mezők egymáshoz képesti elhelyezkedésének nincsen jelentősége a játék szempontjából, így nyugodtan írhatjuk mindig csökkenő sorrendben az ilyen számötösök elemeit.

A nyerő stratégia kulcsa a következő: a második játékos azt szeretné elérni, hogy az első lépése után a $(2,2,0,0,0)$ helyzet álljon elő, majd a második lépése után $(3,3,1,0,0)$ legyen az állás. A következőkben bemutatjuk, hogy ezeket hogyan tudja elérni és ezek segítségével hogyan tud biztosan nyerni.
A kezdő játékos első lépése lényegében kétféle lehet:

- Rakhat az előre lehelyezett koronggal azonos mezőre, így a $(2,0,0,0,0)$ helyzetet hozva létre. Ekkor a második valamelyik üres mezőre fog két korongot rakni, előállítva a kívánt $(2,2,0,0,0)$ helyzetet.
- A kezdő rakhat valamelyik üres mezőre is, így az $(1,1,0,0,0)$ helyzetet hozza létre. Ekkor a mésodik valamelyik a két 1-korongos mezőre rak egy-egy újabb korongot, előállítva a kívánt $(2,2,0,0,0)$ helyzetet.

Most a kezdő következik, megint két lehetősége van a kezdőnek:

- Ha a következő lépésben a kezdő egy eddig üres mezőre tesz, akkor a $(2,2,1,0,0)$ helyzetet állítja elő. A második a két darab 2 korongot tartalmazó mezőre tesz egy-egy korongot, előállítva a kívánt $(3,3,1,0,0)$ állást.
- Ha a kezdő a második korongját a két korongos mezők egyikére teszi, akkor a $(3,2,0,0,0)$ helyzetet állítja elő. Most a második jétékos a a 2 korongosra és az egyik üres mezőre rak egy-egy korongot, ezzel érve el a kívánt $(3,3,1,0,0)$ állást.

Megint a kezdő következik:

- Ha a kezdő valamelyik 3 korongos mezőre tesz, akkor $(4,3,1,0,0)$ lesz az állás, így a második nyer, ha valamelyik üres mezőre teszi mindkét korongját.
- Ha a kezdő az 1 korongos mezőre tesz, akkor $(3,3,2,0,0)$ lesz az állás, így a második nyer, ha az egyik 3-as és az egyik üres mezőre is tesz egy-egy korongot.
- Ha a kezdő valamelyik üres mezőre tesz, akkor $(3,3,1,1,0)$ lesz az állás, így a második nyer, ha az egyik 3-as és az egyik 1-es mezőre is tesz egy-egy korongot.

Ezzel megmutattuk, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája.