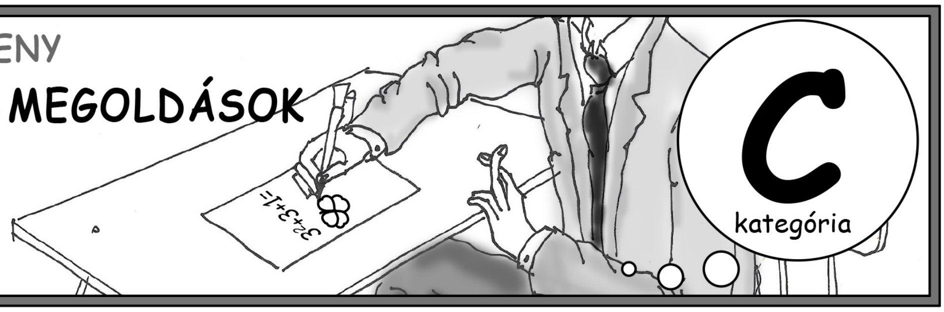
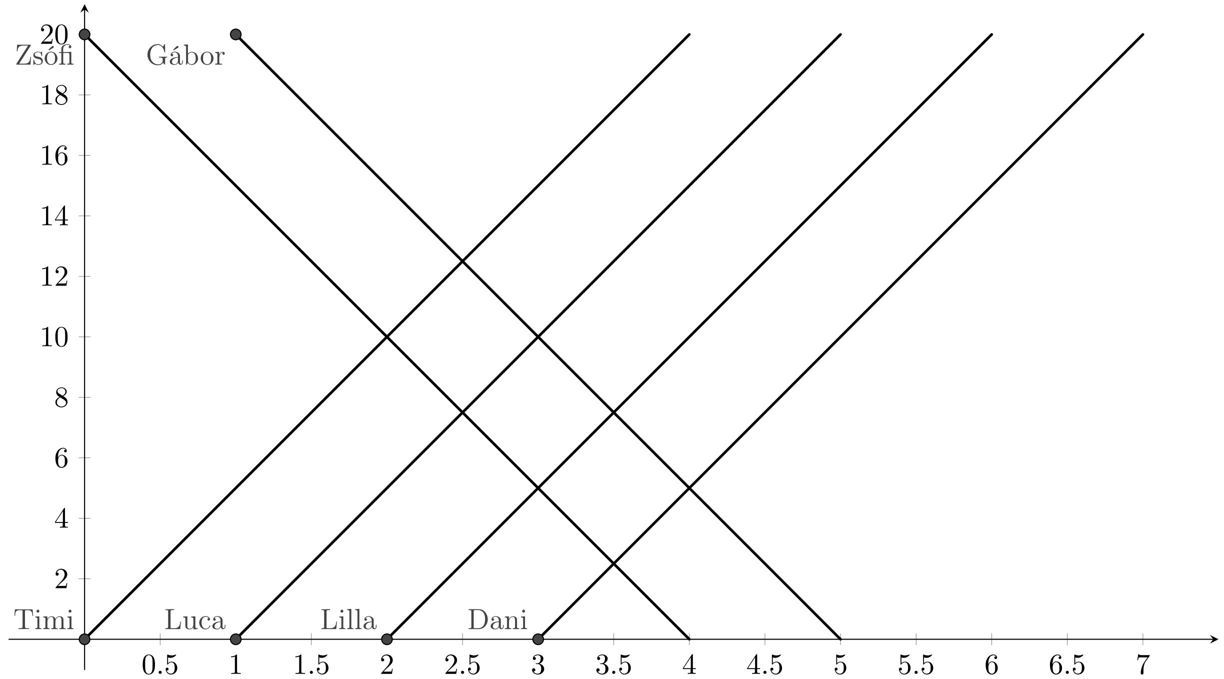


C1. Timi, Luca, Lilla és Dani gyalog szeretne eljutni Miskolcról a 20 km-re fekvő Szikszóra, míg Zsófi és Gábor ugyanazon az úton Szikszóról Miskolcra. Timi 8:00-kor, Luca 9:00-kor, Lilla 10:00-kor, Dani pedig 11:00-kor indul Miskolcról. Zsófi 8:00-kor, Gábor 9:00-kor indul Szikszóról. Mindannyian 5 km/h sebességgel sétálnak. Mindenki kedvenc Marvinja szívesen kísér el bárkit egy darabon, de ha szembetalálkoznak valakivel, útitársat vált. Ha Marvin jelenleg Miskolcon van, kivel indulhat el, hogy végül Szikszón kössön ki?

Megoldás: A Miskolcról indulók először Zsófival, majd Gáborral találkoznak, míg a Szikszóról indulók Timi, Luca, Lilla, Dani sorrendben találkoznak a szembejövőkkel.

Ha ábrázoljuk, hogy a 8:00 óta eltelt órák függvényében ki hány km-re van Miskolctól, az alábbi ábrát kapjuk. ("Lent" van Miskolc, "fent" Szikszó.) Ez segít a találkozások követésében:



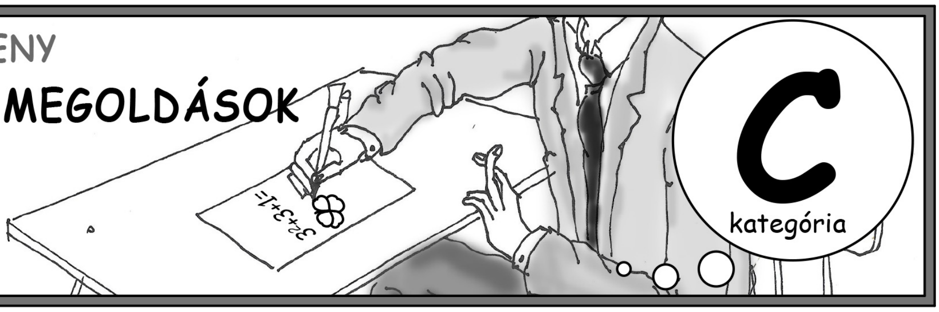
Ha Timinél van kezdetben Marvin, akkor ő először Zsófival találkozik szembe 10:00-kor, így Marvin ezentúl nála van. Ezután Zsófi a következő szembejövővel, azaz Lucával találkozik (10:30-kor), és átadja Marvint. Luca Szikszó felé már csak Gáborral találkozik (11:00-kor), így Marvin nála lesz, amíg át nem adja Lillának (11:30-kor), aki utána már nem találkozik senkivel, így elviszi Szikszóig. Tehát, ha Timivel indul el, az jó.

Ha Lucánál van kezdetben Marvin, akkor ő először Zsófival találkozik szembe 10:30-kor, így Marvin ezentúl nála van. Ezután Zsófi a következő szembejövővel, azaz Lillával találkozik (11:00-kor), és átadja Marvint. Lilla Szikszó felé már csak Gáborral találkozik (11:30-kor), így Marvin nála lesz, amíg át nem adja Daninak (12:00-kor), aki utána már nem találkozik senkivel, így elviszi Szikszóig. Tehát, ha Lucával indul el, az is jó.

Ha Lillánál van kezdetben Marvin, akkor ő először Zsófival találkozik szembe 11:00-kor, így Marvin ezentúl nála van. Ezután Zsófi a következő szembejövővel, azaz Danival találkozik (11:30-kor), és átadja Marvint. Dani Szikszó felé már csak Gáborral találkozik (12:00-kor), így Marvin nála lesz, de mással már nem találkozik, így Marvin Miskolcon köt ki. Tehát, ha Lillának adjuk, az nem jó.

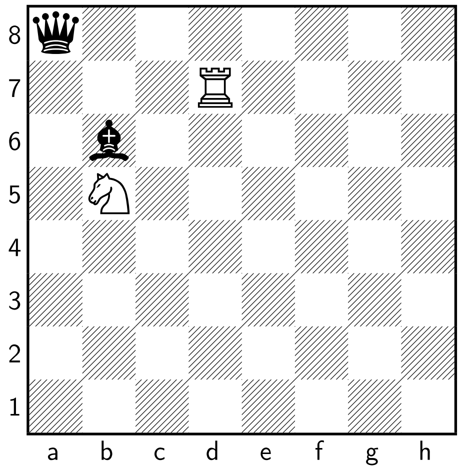
Ha Daninál van kezdetben Marvin, akkor ő először Zsófival találkozik szembe 11:30-kor, így Marvin ezentúl nála van. Viszont Zsófi ezután már senkivel se találkozik, így Marvint elviszi Miskolcig. Tehát, ha Daninál van, az se jó.

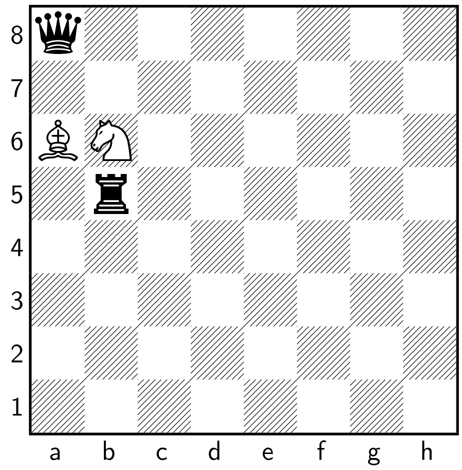
Összefoglalva: csak Timinek vagy Lucának adhatjuk, ha azt szeretnénk, hogy Marvin eljusson Szikszóra.



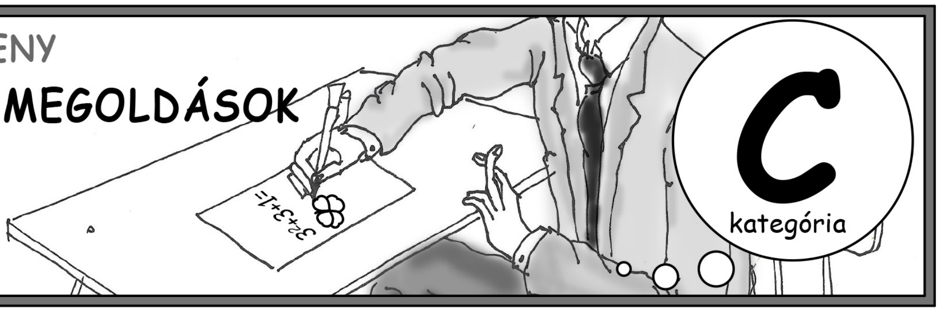
C2. El lehet-e helyezni egy vezért, egy bástyát, egy futót és egy huszárt egy sakktábla bal felső negyedében úgy, hogy minden figura pontosan ugyanannyi másikat üssön, és minden figurát pontosan **a)** 0, **b)** 1, **c)** 2 másik figura üssön?

Megoldás: Az **a)** és a **b)** feladatrészekre a válasz igenlő. Egy-egy lehetséges megoldás látható az alábbi táblákon.





A **c)** részben figyeljük meg, hogy mivel minden figurát két másik bábu üt, összesen 8 ütés történik. Minden figura pontosan ugyanannyi másikat üt, azaz $8/4 = 2$-t. Tehát a huszár is két másik figurát kellene, hogy üssön. Ezek egyike sem ütheti azonban a huszárt, mert huszárlépésben sem a futó, sem a bástya, sem a vezér nem tud lépni. Tehát a huszárt legfeljebb egy másik figura ütheti, azaz nem lehet így elhelyezni a bábukat.



C3. Szeretnénk az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számokkal kitölteni az alábbi ábrát, mindegyiket pontosan egyszer felhasználva.
a) Megtehetjük-e ezt úgy, hogy minden sorban, oszlopban és átlóban a számok összege osztható legyen 3-mal?
b) Kitölthető-e úgy a táblázat, hogy minden összeg 5-tel osztható legyen?
c) Kitölthető-e úgy, hogy 7-tel legyenek oszthatóak az összegek?
d) Kitölthető-e úgy, hogy 9-cel legyenek oszthatóak az összegek?

Megoldás: Az **a)**, **b)** és **d)** esetekben lehetséges a kitöltés, mutatunk rájuk példát.

Az **a)** és **b)** részre is jó az alábbi példa (amely csak egy a megfelelő kitöltések közül):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ennél a kitöltésnél minden sorban, oszlopban és átlóban éppen 15 az összeg, tehát mindegyik összeg osztható 3-mal, illetve mindegyik osztható 5-tel.

Természetesen a **b)** részhez nem szükséges olyan példát találni, ahol még 3-mal is oszthatók az összegek, és az **a)** -hoz sem kell olyat, ahol 5-tel oszthatók, ez csak ráadás. Az összegeknek egyenlőknek sem szükséges lenniük.

A 3×3-as bűvös négyzet éppen illik a versenyhez, Dürer 4×4-es bűvös négyzetének kistestvére!

A **d)** részre, és (ebből következően) **a)**-ra is jó példa a következő:

1	8	9
2	3	4
6	7	5

Itt minden összeg osztható 9-cel, mivel vagy 9, vagy 18.

A **c)** eset feltételének megfelelően azonban nem tölthető ki a táblázat.

Indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy létezik olyan kitöltése a táblázatnak, amelyben minden összeg osztható 7-tel. Jelöljük S-sel a táblázatba írt számok összegét! Az első, a második és a harmadik sorba írt számok összegét pedig jelölje S_1, S_2 illetve S_3. Tudjuk, hogy $S = 1+2+3+\ldots+9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ az összes szám összege (tetszőleges kitöltés esetén).
A táblázat bármely, a **c)** pontnak megfelelő kitöltésében minden sorban osztható 7-tel az adott sorba írt számok összege, tehát S_1, S_2 és S_3 mind oszthatók 7-tel. Így az összegük, $S_1 + S_2 + S_3$ is osztható 7-tel.

A táblázatba írt számok összegét úgy is megkaphatjuk, hogy a különböző sorokba írt számok összegeit (S_1-et, S_2-t és S_3-at) adjuk össze, tehát $S = S_1 + S_2 + S_3$. Mivel $S = 45$ és $S = S_1 + S_2 + S_3$ osztható 7-tel, ezekből azt kapnánk, hogy 45 osztható 7-tel, ami nem igaz. Ez tehát ellentmond annak, hogy létezik a táblázatnak olyan kitöltése, ahol minden sorban 7-tel osztható a számok összege. Így olyan kitöltés sincs, ahol a sorokon túl még minden oszlopban és átlóban is oszthatók lennének az összegek 7-tel.

C4. Albrecht olyan hatszögeket szeret rajzolni a füzetébe, melyeknek minden oldala egyforma hosszú. Egy ilyen hatszög egy belső szögét szépnek mondja, ha az pontosan 120 fokos. Minden hatszögre ráírja, hogy hány szép belső szöge van. Hányféle számot írhat Albrecht a hatszögekre? Adjatok példát minél több lehetséges értékre, és bizonyítsátok be, hogy más miért nem lehetséges.
Albrecht konkáv hatszögeket is rajzolhat.

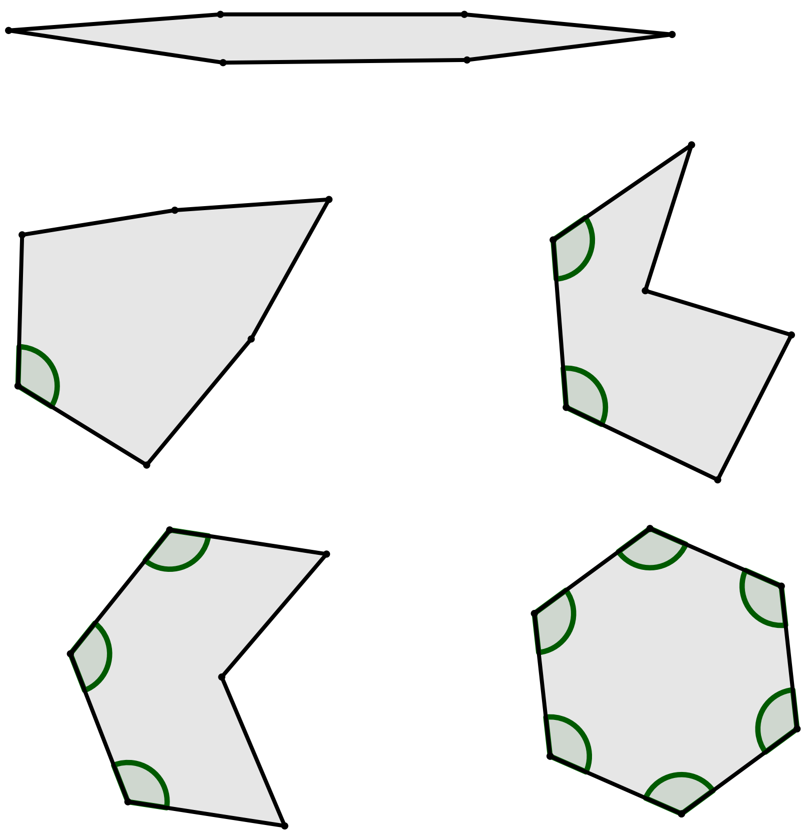
Megoldás:

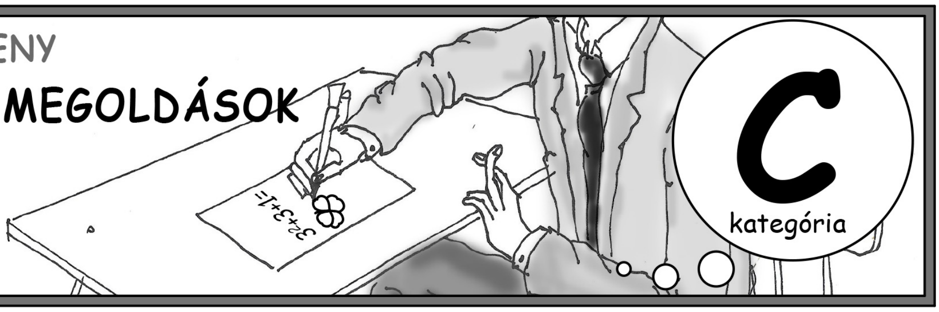
Mivel egy hatszögnek hat szöge van, így a lehetséges értékek 0 és 6 közt vannak.

A szép szögek számának lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3 és 6 (példák lentebb).

A szép szögek nem lehetnek pontosan öten, mert ekkor (például a hatszög belső szögösszegére hivatkozva) azt látjuk, hogy a hatodik szög is szép.

Tegyük fel, hogy van olyan hatszög, aminek pontosan négy szép szöge van. (Láncszerűen) egymás mellett levő szép szögek egyértelműen meghatározzák az oldalaikon levő csúcsok egymáshoz képesti helyzetét – szemléletesen: kimerevítik az ábrát maguk körül. Mivel ennek a hatszögnek két nem szép szöge van, ezért ezek két láncra osztják az oldalakat (lehet, hogy az egyik láncban csak egyetlen oldal van). Ekkor ez a két lánc egymáshoz képest legfeljebb kétféleképp állhat: az egyik esetben konvex, a másikban pedig konkáv (vagy esetleg elfajuló) hatszöget kapunk. A konkáv eseteket azonban kizárhatjuk, mivel a konkáv csúcsok a szép csúcsok közül kerülnének ki, de a szép csúcsoknál levő szögek konvexek, így már csak a konvex esetek maradtak. A két nem szép csúcs egymáshoz viszonyított helyzete alapján (szomszédosak, egy csúcs van köztük vagy átellenesek) megvizsgálva, mi lesz ez az egyértelmű hatszög, mindig a szabályos hatszöget kapjuk, aminek pedig hat szép szöge van, azonban feltettük, hogy csak négy van, így ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezik négy szép szöggel rendelkező hatszög.





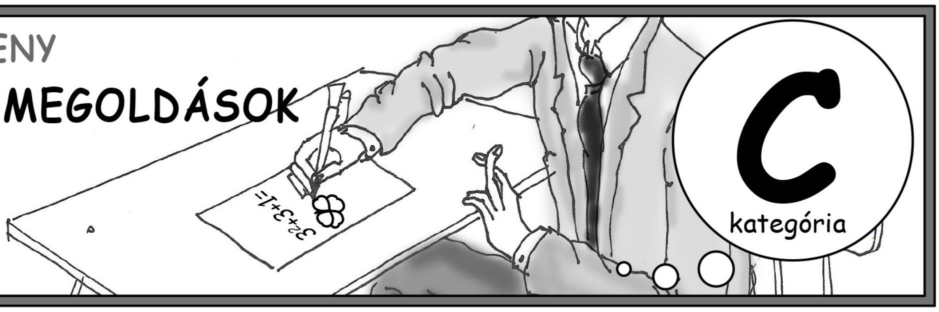
C5. Adott egy 13×13-as táblára osztott térkép, melyről tudjuk, hogy az egyik mezőjének közepén egy ellenséges tank állomásozik, amelyet meg kell semmisítenünk. Ehhez kétszer kell eltalálnunk mezők közepére leadott lövésekkel, azonban ha a tankot találat éri, akkor elővigyázatossági okokból átviszik egy oldalszomszédos mezőre, egyébként egy helyben marad. Legalább hány lövést kell összesen leadnunk, hogy a tankot biztosan megsemmisítsük?
A tankot nem látjuk, és semmilyen egyéb visszajelzést sem kapunk a helyzetéről.

Megoldás: Legalább 253 lövés kell ahhoz, hogy a tank biztosan megsemmisüljön:

Színezzük ki a táblát sakktáblaszerűen (úgy, hogy a saroknégyzetek feketék legyenek), majd sorban lőjünk rá az összes fehér színű mezőre. Ezután a tank biztosan fekete színű mezőn van, hiszen ha eredetileg fehéren volt, akkor onnan átment egy szomszédos feketére. Ezek után lőjünk rá az összes fekete színű mezőre, ennek során pontosan egyszer fogjuk eltalálni a tankot, mely vagy megsemmisül, vagy átmegy egy fehér mezőre. Ezután ismét lőjünk rá az összes fehér mezőre, ekkor ha eddig nem semmisült meg, eltaláljuk, és megsemmisítjük.

Ez összesen $84 + 85 + 84 = 253$ lövés, ennyi tehát biztosan elég a lelövéshez. Megmutatjuk, hogy ennél kevesebb lövéssel nem feltétlenül semmisítjük meg a tankot. Ha lenne két olyan szomszédos mező, amelyekre összesen legfeljebb kétszer lőttünk, akkor a tank a kettő közül arról a mezőről indulva, ahová az első lövés nem érkezett, majd a másik mezőre menekülve nem semmisülne meg.

Tehát ha lefedjük a 13×13-as táblát egy mező kivételével 1×2-es dominókkal, akkor látszik, hogy legalább $\frac{13 \cdot 13 - 1}{2} \cdot 3 + 1 = 253$ lövés szükséges a biztos megsemmisítéshez, mivel az egy kimaradó mezőre is legalább egyszer rá kell lőni.



C6. Játék: Két játékos játszik egy 3×3-as táblán kék és piros korongokkal a szokásos amőba szabályai szerint, tehát felváltva tesznek le korongokat, és ha egy sorban, oszlopban vagy átlóban összegyűlik három azonos színű korong, az adott játékos nyer. Ha az első 9 korong lehelyezése után döntetlen az állás (azaz egyik játékos sem nyert), akkor tovább folytatják a játékot, a soron következő játékos az ellenfél egy már lehelyezett korongját lilára színezheti. Ezek után az nyer, aki először hoz létre három lila korongot egy sorban, oszlopban vagy átlóban.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás:

A játékban a második játékos van nyerő stratégiája. Számozzuk meg a mezőket 1-től 9-ig:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Amennyiben a kezdő játékos az 5-ös mezőre helyezi az első korongot, mi tegyünk az 1-es mezőre. Ha ezután ő a 9-es mezőre tesz, mi rakjunk a 3-as mezőre. Innentől a második játékos ki tudja hozni a döntetlent az első 9 lépésig. Amennyiben nem a 9-esre tesz a második lépésben, akkor is könnyen kihozható döntetlenre az állás. Ezután a 10. lépésben színezzük lilára a középső mezőt. Ezután bármit is fest lilára a kezdő játékos, mi a rá szimmetrikus mezőt be tudjuk majd lilára színezi, amivel nyerünk.

Amennyiben a kezdő játékos nem az 5-ös mezőre tesz, akkor mi teszünk az 5-ös mezőre. Innen logikus lépésekkel szintén kihozható a döntetlen állás. Az állás ilyenkor (a forgatásokat és a tükrözéseket nem számítva) kétféleképpen nézhet ki (x-szel jelölve a mi mezőinket):

x		x
	x	
	x	

x		
	x	x
	x	

Az első esetben színezzük a 4-est lilára, ha a másik ezután az 1-es vagy az 5-öst színezi, akkor a következő lépésben tudunk nyerni. Ha a másik a 3-ast vagy a 8-ast színezi lilára, akkor mi a 9-est színezzük be, és ekkor az ezutáni körben már győzni tudunk.

A második esetben a 3-ast színezzük lilára. Ekkor a másiknak a 8-ast kell beszíneznie, hogy ne kapjon ki a következő lépésben. Arra viszont mi be tudjuk a 4-est színezni. Ekkor bármelyiket színezi is be, a következő lépésben mi már győzni fogunk.